031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 1. välikokeeseen 13.9.2016

1. a) Tason $T : \vec{p} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v} = (2, -1, -3) + s(-2, 0, -1) + t(0, -4, 3)$, s, $t \in \mathbb{R}$, eräs normaalivektori on $\vec{n} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Määrää pisteen $P_1(0, 2, 1)$ etäisyys tasosta T.

   b) Olkoot s ja t reaalilukuja sekä $\vec{u} = s\vec{i} + t\vec{j}$ ja $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Määrää kaikki reaaliluvut s ja t siten, että vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{a}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja toteuttavat lisäksi ehdon $\vec{u} \times \vec{a} = 4\vec{k}$.

   c) Olkoot $z = -3 + i$ ja $w = 4 + i$ kompleksilukuja. Laske liittoluku $\overline{z}$ sekä tulo zw.

1. a) Pisteen $P_1(0, 2, 1)$ etäisyys tasosta T on

$$\begin{aligned} d(P_1, T) &= \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{a})|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-2, 3, 4) \cdot (0 - 2, 2 - (-1), 1 - (-3))|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|(-2, 3, 4) \cdot (-2, 3, 4)|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}. \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{cases} (s\vec{i} + t\vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) &= 0 \\ (s\vec{i} + t\vec{j}) \times (\vec{i} - \vec{j}) &= 4\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s - 0 + 0 - t &= 0 \\ s(\vec{i} \times \vec{i}) - s(\vec{i} \times \vec{j}) + t(\vec{j} \times \vec{i}) - t(\vec{j} \times \vec{j}) &= 4\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s &= t \\ -s\vec{k} + t(-\vec{k}) &= 4\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s &= t \\ (-s - t)\vec{k} &= 4\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s &= t \\ -s - t &= 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s &= t \\ -2t &= 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s &= -2 \\ t &= -2 \end{cases}$$

   c) $\overline{z} = \overline{-3 + i} = -3 - i$, $zw = (-3 + i)(4 + i) = -12 - 3i + 4i + i^2 = -13 + i$