031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 3. välikokeeseen 20.10.2015

1. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{2\cos(x) + x^3 - 2}.$$

b) Määrää funktion $f(x) = x^2 e^x$ kriittiset pisteet sekä tutki niiden laatu toisen derivaatan $f''(x)$ avulla.

1. a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{2\cos(x) + x^3 - 2} &\overset{\text{L'H}}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x) - 3}{-2\sin(x) + 3x^2} \\ &\overset{\text{L'H}}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-9\sin(3x)}{-2\cos(x) + 6x} = \frac{0}{-2} = 0\end{aligned}$$

b) Funktio $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$, on jatkuva ja derivoituva. Lisäksi

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)\underbrace{e^x}_{>0} = 0,$$

josta tulon nollasäännön mukaan saadaan kriittiset pisteet $x = 0$ tai $x = -2$. Kriittisten pisteiden laatu saadaan tutkimalla toisen derivaatan merkkiä kriittisissä pisteissä:

$$\begin{aligned}f''(x) &= (2x+2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x, \\ f''(0) &= (0^2 + 0 + 2)e^0 = 2 > 0, \\ f''(-2) &= ((-2)^2 - 8 + 2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0.\end{aligned}$$

Piste $x = 0$ on aito paikallinen minimipiste.

Piste $x = -2$ on aito paikallinen maksimipiste.

2. a) Laske sijoitusta $t = \sqrt{x}$ käyttäen

$$\int \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^3}\, dx.$$

b) Käyrä

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x^2 + 3x + 3}},\ 0 \le x \le 1,$$

pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuneen kappaleen tilavuus.

2. a) Tehdään sijoitus $t = \sqrt{x}$ $\quad x = t^2, t \ge 0 \quad dx = 2t\, dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^3}\, dx &= \int \frac{3}{t(t+1)^3} \cdot 2t\, dt = \int 6(t+1)^{-3}\, dt \\ &= -3(t+1)^{-2} + C = -\frac{3}{(\sqrt{x} + 1)^2} + C\end{aligned}$$

b) Pyörähdyskappaleen tilavuus:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^1 (f(x))^2\, dx = \pi \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2 + 3x + 3}\, dx \\ &= \pi \Big/_0^1 \ln\left|x^2 + 3x + 3\right| = \pi(\ln 7 - \ln 3) = \pi \ln \frac{7}{3}.\end{aligned}$$