031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 2. välikokeeseen 29.9.2015

1. a) Olkoon $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 4$ funktio, jonka määritysjoukko $M_f = [-5, -3]$ ja kuvajoukko $K_f = [-4, 0]$. Muodosta funktion f käänteisfunktio $y = f^{-1}(x)$ määritysjoukkoineen $M_{f^{-1}}$.

   b) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

   c) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}).$$

   d) Voidaan osoittaa, että funktiolla $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1) - 1$ on olemassa käänteisfunktio $y = f^{-1}(x)$, kun $x < 0$. Määritä $(f^{-1})'(-\ln(2))$.

1. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 4$, $M_f = [-5, -3]$ ja $K_f = [-4, 0]$.
Merkitään $y = \sqrt{x^2 - 9} - 4$, jolloin $y \in [-4, 0]$.

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2 - 9} - 4 \\
y + 4 &= \sqrt{x^2 - 9} \quad \Big| (\cdot)^2 \quad \text{(molemmat puolet } \geq 0) \\
y^2 + 8y + 16 &= x^2 - 9 \\
x^2 &= y^2 + 8y + 16 + 9 \\
x^2 &= y^2 + 8y + 25 \quad \Big| -\sqrt{\cdot} \leq 0 \\
x &= -\sqrt{y^2 + 8y + 25} = f^{-1}(y)\,.
\end{aligned}$$

Siis $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 8x + 25}$, $M_{f^{-1}} = K_f = [-4, 0]$.

b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(x - 4)} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(\sqrt{x} + 2)(x - 4)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x - 4}{(\sqrt{x} + 2)(x - 4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2 + 4x) - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2(1 + \frac{4}{x})} + \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{\underbrace{|x|}_{=-x}\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \underbrace{|x|}_{=-x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{-\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d) Funktio $f(x) = x^2 - \ln(x^2+1) - 1$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x < 0$. Tällöin

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2+1}.$$

$f(x_0) = x_0^2 - \ln(x_0^2+1) - 1 = -\ln(2)$, kun $x_0 = -1 < 0$, joten

$$(f^{-1})'(-\ln(2)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-2 - \frac{-2}{1+1}} = -1.$$