**031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I**

**Ratkaisut 1. välikokeeseen 15.9.2015**

1. a) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö
$$|2x-9|<5.$$

b) Olkoot $\vec{u}=\vec{j}-2\vec{k}$ ja $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Muodosta vektorit $\vec{x}=2\vec{u}+\vec{v}$ ja $\vec{y}=-\vec{u}-\vec{v}$. Laske vektorin $\vec{y}$ pituus $\|\vec{y}\|$ sekä tutki, ovatko vektorit $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan.

c) Suora $l$ kulkee pisteen $A(1,-1,2)$ kautta ja sen suuntavektori $\vec{u}$ on tason $T: 2x+y-z-2=0$ normaalivektori $\vec{n}$. Esitä suoran yhtälö muodossa $l:\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$, $t\in\mathbb{R}$, sekä tutki, onko piste $Q(-1,-2,3)$ suoralla $l$.

d) Määrää funktion
$$f(x)=\frac{\sqrt{-x-5}}{x+1}$$
määritysjoukko $M_f$.

1. a)

$$\begin{aligned}
|2x-9| &< 5\\
-5<2x-9 &< 5 \qquad \Big| +9\\
4<2x &< 14 \qquad \Big| :2,\quad 2>0\\
2<x &< 7
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{x}&=2\vec{u}+\vec{v}=2(\vec{j}-2\vec{k})+3\vec{i}-\vec{j}=2\vec{j}-4\vec{k}+3\vec{i}-\vec{j}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}=(3,1,-4),\\
\vec{y}&=-\vec{u}-\vec{v}=-(\vec{j}-2\vec{k})-(3\vec{i}-\vec{j})=-\vec{j}+2\vec{k}-3\vec{i}+\vec{j}=-3\vec{i}+2\vec{k}=(-3,0,2),\\
\|\vec{y}\|&=\sqrt{(-3)^2+0^2+2^2}=\sqrt{13}\\
\vec{x}\cdot\vec{y}&=(3,1,-4)\cdot(-3,0,2)=3(-3)+1\cdot0+(-4)2=-17\neq0,
\end{aligned}$$

joten vektorit $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

c) Valitaan kiinteäksi pisteeksi $A(1,-1,2)$ ja suuntavektoriksi tason $2x+y-z-2=0$ eräs normaalivektori $\vec{n}=(2,1,-1)$. (Myös $-\vec{n}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(-2,-1,1)$ on tason eräs normaalivektori.) Suoran yhtälö on

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{n}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}+t(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=(1+2t)\vec{i}+(-1+t)\vec{j}+(2-t)\vec{k},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Piste $Q(-1,-2,3)$ on suoralla $l$, jos on olemassa sellainen $t\in\mathbb{R}$, että

$$(-1,-2,3)=(1+2t,-1+t,2-t).$$

Saadaan yhtälöryhmä
$$\begin{cases}-1 &= 1+2t\\ -2 &= -1+t\\ 3 &= 2-t,\end{cases}$$

joka toteutuu, kun $t=-1$. Piste $Q(-1,-2,3)$ on siis suoralla $l$.

d)

$$\begin{aligned}
M_f&=\{x\in\mathbb{R}\mid -x-5\geq0 \text{ ja } x+1\neq0\}\\
&=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq-5 \text{ ja } x\neq-1\}\\
&=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq-5\}=]-\infty,-5]
\end{aligned}$$