Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 31.10.2023

Välivaiheet ja perustelut näkyviin. Pelkkä vastaus ei riitä.

1. Laske funktion

$$f(z) = \frac{2z}{1-z^2}$$

sarjaesitys pisteen

a) $z_0 = 0$ ympäristössä. Määrää derivaatta $f^{(2023)}(0)$.

b) $z_0 = 1$ ympäristössä. Mikä on laajin mahdollinen alue, missä tämä sarjaesitys on voimassa?

2. Laske integraali

$$\int_C \frac{-9z^2 + 3z}{(z-\frac{2}{5})(z-\frac{1}{2})(z-1)} \mathrm{d}z,$$

missä C on vastapäivään kierretty ympyrä $\{|z| = 2\}$.

3. Olkoon $(h(n))_{n=0}^{\infty}$, jolle

$$h(n) = 6\left(\frac{2}{5}\right)^n - 15\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

erään kausaalisen LTI-systeemin impulssivaste. Laske systeemin

a) siirtofunktio. (2p)

b) vaste yksikköaskeljonolle (3p)

$$(x(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 1, \dots), \quad \text{jolle } x(n) = 1 \text{ kaikilla } n \geq 0.$$

c) Onko systeemi stabiili? (1p)

Koekaavat

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0}$$

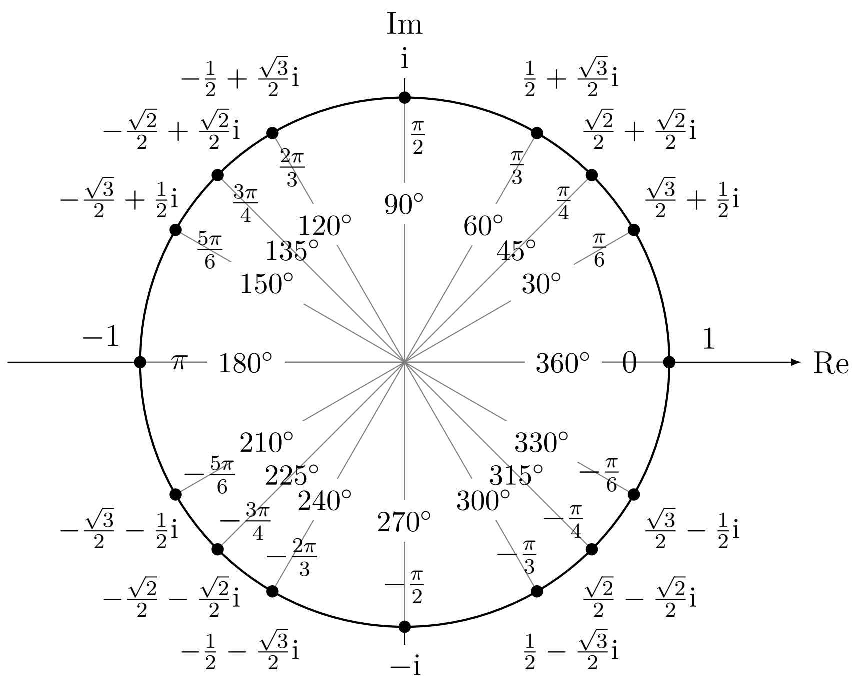
$$X(\omega) = \sum_n x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n - k) \leftrightarrow X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n - k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Määrätään aluksi funktion erikoispisteet, jotka ovat nimittäjän $1-z^2$ nollakohdat $z=\pm 1$. Koska f on analyyttinen pisteen $z_0=0$ ympäristössä, on sillä *Taylorin sarja*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

pisteen $z_0=0$ ympäristössä. Sarjan suppenemissäde on $R=1$, sillä erikoispisteiden $z=\pm 1$ etäisyys origosta on 1. Sarjan laskemiseksi voidaan käyttää geometrisen sarjan summakaavaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k=\frac{1}{1-w}, \quad |w|<1.$$

Hajotetaan sitä varten f osamurtokehitelmällä muotoon

$$f(z)=\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2z}{(1-z)(1+z)}=-\frac{(1+z)-(1-z)}{(1-z)(1+z)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}.$$

Viimeistä edelliseen osamäärään voidaan soveltaa suoraan geometrisen sarjan summakaavaa ja viimeisessä voidaan valita $w=-z$, jolloin saadaan

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k-\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(1-(-1)^k)z^k=\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot z^{2n+1}, \quad |z|<1.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa on huomioitu, että z^k:n kerroin häviää parillisilla k.

Toinen tapa on geometrisen sarjan summakaavan soveltaminen suoraan valitsemalla $w=z^2$, jolloin

$$f(z)=2z\cdot\frac{1}{1-z^2}=2z\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot z^{2n+1}, \quad |z|<1.$$

Derivaatan laskemisessa huomioidaan, että Taylorin sarjan z^k:n kerroin on muotoa $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Niinpä valitsemalla $k=2023$ saadaan

$$f^{(2023)}(0)=(1-(-1)^{2023})\cdot 2023!=2\cdot 2023!.$$

b) Nyt f ei ole analyyttinen pisteessä $z_0=1$, sillä f ei edes ole määritelty pisteessä $z_0=1$. Teorian mukaan f:llä on *Laurentin sarja*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$$

alueessa $0<|z-1|<2$ (sillä funktion erikoispisteen $z=-1$ etäisyys pisteestä $z_0=1$) on 2). Käytetään tässäkin a)-kohdassa laskettua osamurtokehitelmää, jossa $\frac{1}{1-z}=-(z-1)^{-1}$ on jo valmiiksi sopivaa muotoa. Viimeistä osamäärää voidaan muokata seuraavasti

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(z-1)^n.$$

Osamurtokehitelmän perusteella Laurentin sarja on

$$f(z)=-(z-1)^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}(z-1)^k, \quad 0<|z-1|<2.$$

2. Integrandin

$$f(z) = \frac{-9z^2 + 3z}{(z - \frac{2}{5})(z - \frac{1}{2})(z - 1)}$$

ainoat erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat $z = \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, 1$, jotka kaikki ovat *yksinkertaisia napoja*, sillä f on supistetussa muodossa. Kaikki navat ovat C:n sisällä, joten residylaskun mukaan kysytty integraali on

$$2\pi \mathrm{i} \left(\mathrm{Res}_{z=\frac{2}{5}} f(z) + \mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) + \mathrm{Res}_{z=1} f(z) \right).$$

Käytetään residyjen laskemiseen kaavakokoelmasta löytyvää laskukaavaa, jonka mukaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=\frac{2}{5}} f(z) &= \lim_{z \to \frac{2}{5}} (z - \tfrac{2}{5}) f(z) = \lim_{z \to \frac{2}{5}} \frac{-9z^2 + 3z}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)} = -4, \\
\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) &= \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \tfrac{1}{2}) f(z) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{-9z^2 + 3z}{(z - \frac{2}{5})(z - 1)} = 15, \\
\mathrm{Res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{-9z^2 + 3z}{(z - \frac{2}{5})(z - \frac{1}{2})} = -20.
\end{aligned}$$

Residylaskun perusteella integraaliksi saadaan $2\pi\mathrm{i}(-4 + 15 - 20) = -18\pi\mathrm{i}$.

Integrandin voi vaihtoehtoisesti hajoittaa (käsin työlähköllä, mutta koneella helpolla) osamurtokehitelmällä muotoon

$$f(z) = \frac{15}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4}{z - \frac{2}{5}} - \frac{20}{z - 1} \tag{1}$$

ja käyttää kuhinkin termiin Cauchyn kaavaa integraalin laskemiseksi.

3. a) Määritelmän mukaan siirtofunktio on

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n z^{-n} - 15 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n z^{-n}.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty Z-muunnoksen lineaarisuutta. Lasketaan oikean puolen sarjojen summat geometrisen sarjan summakaavalla, jonka mukaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5z} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{5z}} = \frac{5z}{5z - 2}, \quad |z| > \frac{2}{5},$$

ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z} \right)^n = \frac{2z}{2z - 1}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Suppenemisalueet tulivat geometrisen sarjan suppenemiskriteeristä. Edellisen perusteella siirtofunktio on

$$H(z) = 6 \frac{5z}{5z - 2} - 15 \frac{2z}{2z - 1} = \frac{-90z^2 + 30z}{(5z - 2)(2z + 1)} = \frac{-9z^2 + 3z}{(z - \frac{2}{5})(z - \frac{1}{2})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

b) Lasketaan vaste Z-muunnoksen avulla. Määritelmän ja kaavakokoelman mukaan yksikköaskeljonon Z-muunnos on

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1},$$

joten vastejonon $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos on

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{-9z^3 + 3z^2}{(z - \frac{2}{5})(z - \frac{1}{2})(z-1)},$$

jonka Z-käänteismuunnos on

$$y(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} Y(z) z^{n-1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{-9z^2 + 3z}{(z - \frac{2}{5})(z - \frac{1}{2})(z-1)} z^n \mathrm{d}z,$$

missä S_r on ympyrä $\{|z| = r\}$, joka sulkee sisäänsä kaikki integrandin navat. Voidaan siis valita mikä tahansa $r > 1$. Residylaskun mukaan

$$y(n) = \mathrm{Res}_{z=\frac{2}{5}} f(z) z^n + \mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) z^n + \mathrm{Res}_{z=1} f(z) z^n,$$

missä $f(z)$ on tehtävän 2 integrandi. Ainoa ero tehtävään 2 nähden on z:n potenssi z^n. Niinpä käytännössä samalla laskulla kuin tehtävässä 2 saadaan

$$y(n) = -4 \left(\frac{2}{5}\right)^n + 15 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 20, \quad n \geq 0.$$

Toinen tapa on tehtävän 2 osamurtokehitelmän (1) käyttö, jonka mukaan

$$Y(z) = zf(z) = 15 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 4 \frac{z}{z - \frac{2}{5}} - 20 \frac{z}{z-1}.$$

Vasteeseen päästään geometrisen sarjan summakaavalla.
Kolmas tapa on kaavan $y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k)$ käyttö. Koska tässä $x(n-k) = 1$ kaikilla $k = 0, \ldots, n$. voidaan käyttää geometrisen summan kaavaa vasteen laskemiseen.

c) Teorian mukaan systeemi on stabiili, jos ja vain jos kaikki siirtofunktion navat ovat yksikköympyrän sisällä. Koska nyt navat $z = 1/2$ ja $z = 2/5$ ovat yksikköympyrän sisällä, niin systeemi on stabiili.