Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

1. välikoe 2.10.2023

Välivaiheet ja perustelut näkyviin. Pelkkä vastaus ei riitä.

1. a) Olkoot $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i}$ ja $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ kompleksilukuja. Laske osamäärän $\frac{z}{w}$ itseisarvo ja argumentin pääarvo. Ilmoita osamäärä muodossa $a + b\mathrm{i}$.

   b) Ratkaise yhtälö
   $$z^3 = \mathrm{i}.$$
   Piirrä ratkaisut kompleksitasoon.

2. Tarkastellaan funktiota
   $$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = -y^2 + 1 + \mathrm{i}(2x^2 + 2x - 1).$$

   a) Missä pisteissä funktiolla f on derivaatta? (3p)

   b) Laske funktion f derivaatta kaikissa niissä pisteissä z, missä funktiolla f on derivaatta. (2p)

   c) Missä pisteissä f on analyyttinen? (1p)

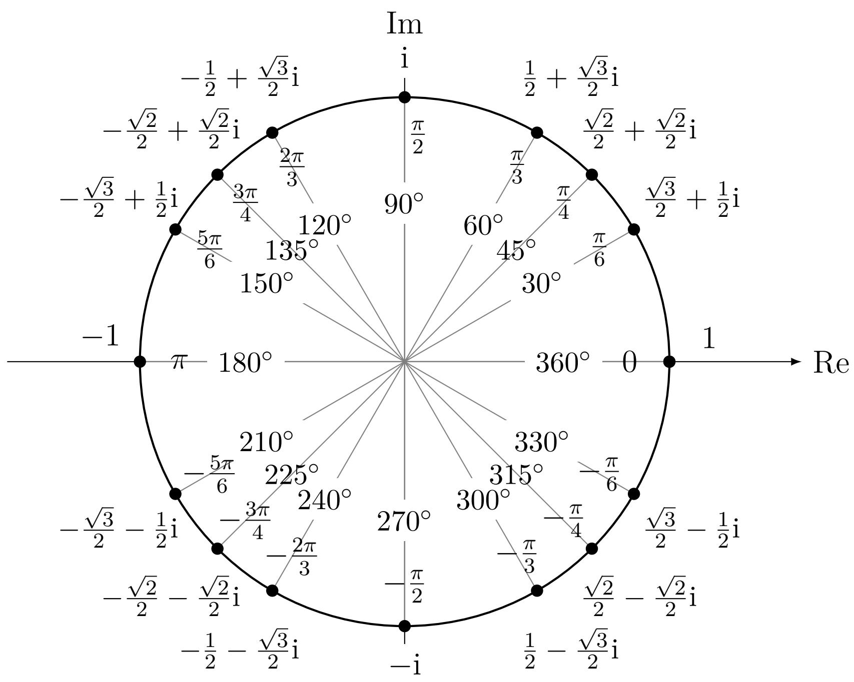
3. a) Laske integraali
   $$\int_C \frac{2}{z^2 - 2z}\mathrm{d}z,$$
   missä C on yksikköympyrä kertaalleen positiiviseen kiertosuuntaan kierrettynä. (4p)

   b) Esitä funktion $f(z) = \frac{2z}{z-2}$ derivaatta $f'(0)$ yksikköympyrän yli otetun kompleksisen käyräintegraalin avulla. (2p)

Koekaavat

$$
\begin{aligned}
z &= x + \mathrm{i}y & \overline{z} &= x - \mathrm{i}y \\
z \cdot \overline{z} &= |z|^2 & \frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \\
\sin z &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} & \cos z &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \\
\mathrm{e}^{z} &= \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \cos z + \mathrm{i}\sin z \\
\sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 & \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] & \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \\
\log z &= \ln|z| + \mathrm{i}\arg z & z_k &= |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n} \\
f(z) &= f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
\sum_{k=0}^{\infty} z^k &= \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 & \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} &= \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n & f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\
a_n &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & a_n &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \\
f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z & a_{-1} &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0} \\
X(\omega) &= \sum_{n} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n} & \mathbf{X}(z) &= \sum_{n} x(n) z^{-n} \\
x(n-k) &\leftrightarrow X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} & x(n-k) &\leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k} \\
Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) & \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z) \\
\mathbf{H}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} & h(k) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Käytetään hyväksi eksponenttiesitystä. Sitä varten lasketaan ensin annettujen lukujen itseisarvot, joiksi saadaan $|z| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 4$ ja $|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Tämän ja yksikköympyrän perusteella

$$z = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{ja} \quad w = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

Niinpä

$$\frac{z}{w} = \frac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)},$$

joten osamäärän itseisarvo on $\left|\frac{z}{w}\right| = 2$ ja argumentin pääarvo $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = -\frac{7\pi}{12}$. Muoto $a + b\mathrm{i}$ saadaan joko suoraan eksponenttiesityksestä Eulerin kaavalla

$$\frac{z}{w} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)} = 2\cos(-\frac{7\pi}{12}) + 2\sin(-\frac{7\pi}{12})\mathrm{i}$$

tai laventamalla nimittäjän konjugaatilla

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i}) = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathrm{i}.$$

b) Käytetään jälleen hyväksi eksponenttiesitystä $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ja $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)}$, jolloin

$$z^3 = r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)},$$

josta saadaan yhtälöpari $r^3 = 1$ ja $3\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, jonka ratkaisu on $r = 1$ ja $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$. Löydetään 3 ratkaisua

$$\begin{aligned} z_0 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \\ z_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \\ z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Kunkin rivin viimeisissä yhtäsuuruuksissa on hyödynnetty yksikköympyrää. Jätetään piirtäminen tässä lukijalle. Geometrisesti yksikköympyrän kehällä olevat ratkaisut ovat tasasivuisen kolmion kärkipisteet, joista yksi on y-akselilla pisteessä $z = -\mathrm{i}$ ($y = -1$).

2. a) Funktio f on kirjoitettu perusmuodossa $f = u + \mathrm{i}v$, missä $u = u(x,y) = 1 - y^2$ ja $v = v(x,y) = 2x^2 + 2x - 1$. Cauchy-Riemannin yhtälöiden mukaan on oltava $u_x = 0 = v_y$ ja $-u_y = 2y = 4x + 2 = v_x$, joista saadaan $y = 2x + 1$. Koska lisäksi u ja v ovat "siistejä" (hyvin käyttäytyviä funktioita x:n ja y:n suhteen), niin luennoilla esitetyn perusteella f on derivoituva suoralla $y = 2x + 1$.

b) Derivaatta on $f'(z) = u_x(x,y) + \mathrm{i}v_x(x,y)$ kaikissa pisteissä $z = x + \mathrm{i}y$, joissa derivaatta on olemassa, joten a)-kohdan mukaan

$$f'(x + \mathrm{i}(2x+1)) = u_x(x, 2x+1) + \mathrm{i}v_x(x, 2x+1) = \mathrm{i}(4x+2).$$

c) Funktio ei ole analyyttinen missään, sillä millekään suoran $y = 2x + 1$ pisteelle ei löydy ympäristöä (kiekkoa $D(z, \epsilon)$), jossa f olisi derivoituva (olipa ϵ kuinka pieni hyvänsä).

3. a) Lasketaan nimittäjän nollakohdat: $z^2 - 2z = z(z-2) = 0$, kun $z = 0$ tai $z = 2$. Vain $z = 0$ on yksikköympyrän sisäpuolella, joten integrandi voidaan kirjoittaa muodossa $f(z) = \frac{g(z)}{z}$, missä $g(z) = \frac{2}{z-2}$ on analyyttinen origokeskisessä 2-säteisessä kiekossa $D(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ (koska origoa lähinnä oleva ”paha piste” on $z = 2$), joka sisältää C:n. Siten Cauchyn kaavan mukaan

$$\int_C \frac{2}{z^2 - 2z} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \cdot g(0) = -2\pi \mathrm{i}.$$

Toinen mahdollisuus on osamurtokehitelmän (OMK)

$$f(z) = \frac{2}{z(z-2)} = \frac{z - (z-2)}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}$$

käyttö, jonka mukaan

$$\int_C f(z) \mathrm{d}z = \int_C \frac{1}{z-2} \mathrm{d}z - \int_C \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 0 - 2\pi \mathrm{i}.$$

Oikean puolen ensimmäinen integraali hävisi Cauchyn lauseen mukaan ja jälkimmäisen voi laskea parametriesityn avulla tai vedota Cauchyn kaavaan.

b) Funktio f on rationaalifunktiona analyyttinen kaikkialla muualla paitsi nimittäjän nollakohdassa $z = 2$. Koska f on erityisesti analyyttinen kiekossa $D(0,2)$, joka sisältää yksikköympyrän, niin Cauchyn kaavan nojalla

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{2}{z(z-2)} \mathrm{d}z = -1$$

a)-kohdan mukaan.