Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 31.10.2022

1. Laske funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 6z + 8}$$

   a) Taylorin sarja, jonka keskipiste on $z_0 = 0$. Mikä on sarjan suppenemisalue?

   b) Laurentin sarja alueessa $|z| > 4$.

2. Laske residylaskun avulla integraali

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 6z + 8} \mathrm{d}z,$$

   missä C on

   a) vastapäivään kierretty ympyrä $\{|z| = 3\}$.

   b) vastapäivään kierretty ympyrä $\{|z| = 5\}$.

3. Olkoon

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z}{z^2 + 6z + 8}$$

   erään kausaalisen LTI-systeemin siirtofunktio. Laske systeemin

   a) impulssivaste. (4p)

   b) vaste herätteelle (2p)

$$(x(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 6, 8, 0, \dots), \quad \text{jolle } x(n) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 3.$$

   c) Onko systeemi stabiili? (1p)

Koekaavat

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]_{z = z_0}$$

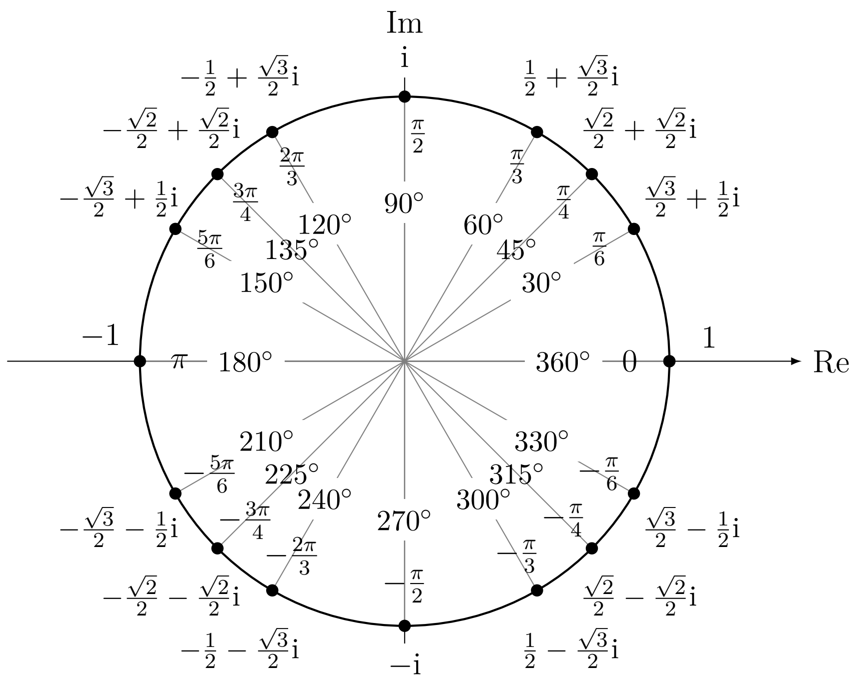
$$X(\omega) = \sum_n x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n - k) \leftrightarrow X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n - k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. Selvitetään ensin funktion f nimittäjän z^2+6z+8 nollakohdat, jotka saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$z^2+6z+8=0 \Leftrightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}.$$

Nimittäjä voidaan siten jakaa tekijöihin $z^2+6z+8=(z+2)(z+4)$ ja f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z)=\frac{z}{(z+2)(z+4)}.$$

Käytetään jatkossa hyväksi geometrisen sarjan summakaavaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1.$$

a) Jaetaan f osamurtokehitelmällä muotoon

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{z}{(z+2)(z+4)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+4}=\frac{A(z+4)+B(z+2)}{(z+4)(z+2)} \\ &=\frac{(A+B)z+4A+2B}{(z+4)(z+2)}. \end{aligned}$$

Vertaamalla osoittajia keskenään päädytään yhtälöpariin ja sen ratkaisuun seuraavasti

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ 4A+2B &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

Kehitetään nyt f Taylorin sarjaksi pisteen $z_0=0$ ympäristössä geometrisen sarjan summakaavalla seuraavasti

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{-1}{z+2}+\frac{2}{z+4}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)} \\ &=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^k \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right)z^k \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right)z^k \end{aligned}$$

Kaikki edellä tehty on luvallista, kun $|z|<2$, joka tulee geometrisen sarjan suppenemiskriteeristä ja on samalla Taylorin sarjan suppenemisalue.

b) Koska alueena on nyt ulkoalue $|z|>4$, niin pyritään kehittämään f geometrisen sarjan summakaavalla z^{-1}:n potensseiksi. Tämä on luvallista, kunhan $\left|\frac{4}{z}\right|<1$, jolloin myös $\left|\frac{2}{z}\right|<1$. Menetellään samaan tapaan kuin a)-kohdassa, mutta otetaan nyt z yhteiseksi tekijäksi nimittäjissä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{z}\right)}\\
&= -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^k+\frac{2}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{z}\right)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^{k+1}2^k+(-1)^k2^{2k+1}\right)z^{-k-1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n}2^{n-1}+(-1)^{n-1}2^{2n-1}\right)z^{-n},
\end{aligned}$$

joka on f:n Laurentin sarja alueessa $|z|>4$. Toiseksi viimeisessä yhtäsuuruudessa on viety $1/z=z^{-1}$ summalausekkeiden sisään, yhdistetty summat ja samanmuotoisia termejä sekä otettu $z^{-1}z^{-k}=z^{-k-1}$ yhteiseksi tekijäksi. Lisäksi on kirjoitettu $4^k=2^{2k}$. Viimeisessä yhtäsuuruudessa on tehty indeksinvaihto $k+1=n$.

2. Havaitaan, että integrandi on sama funktio kuin tehtävässä 1, joten sen nimittäjän nollakohdat ovat $z_1=-2$ ja $z_2=-4$. Integrandi voidaan kirjoittaa tekijöihin jaetussa muodossa

$$f(z)=\frac{z}{(z+2)(z+4)}.$$

Koska f on supistetussa muodossa oleva rationaalifunktio, ovat sen erikoispisteet $z_1=-2$ ja $z_2=-4$, jotka molemmat ovat **yksinkertaisia napoja**.

a) Koska ainoastaan $z_1=-2$ on C:n sisällä, niin Residylauseen ja kertalukua n olevalle navalle pätevän residyn laskukaavan

$$a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^nf(z)\right]_{z=z_0} \tag{1}$$

mukaan

$$I=\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}_{z=-2}f(z)=2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{z}{z+4}\right|_{z=-2}=-2\pi\mathrm{i}.$$

b) Edetään samalla tavalla kuin a=-kohdassa. Tällä kertaa molemmat erikoispisteet ovat C:n sisällä, joten Residylauseen mukaan

$$I=2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{z=-2}f(z)+\mathrm{Res}_{z=-4}f(z)\right).$$

Ensimmäinen residy laskettiin jo a)-kohdassa, joten riittää laskea toinen residy. Samalla tavalla kuin a)-kohdassa saadaan

$$\mathrm{Res}_{z=-4}f(z)=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to-4}(z+4)f(z)=\left.\frac{z}{z+2}\right|_{z=-4}=2,$$

joten integraaliksi saadaan

$$I=2\pi\mathrm{i}\,(-1+2)=2\pi\mathrm{i}.$$

3. a) Havaitaan, että siirtofunktio on sama kuin tehtävän 1 f. Impulssivaste voidaan laskea esimerkiksi kompleksisena käyräintegraalina

$$h(k) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{z^k}{(z+2)(z+4)} \mathrm{d}z,$$

missä C voi olla mikä tahansa R-säteinen ympyrä, jolle $R > 4$.
Ainoat erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat $z_1 = -2$ ja $z_2 = -4$, jotka ovat **ensimmäisen kertaluvun napoja**. Voidaan siis menetellä samalla tavalla kuin tehtävässä 2. Residylauseen ja residyn laskukaavan (1) mukaan

$$\begin{aligned} h(k) &= \mathrm{Res}_{z=-2} \mathbf{H}(z) z^{k-1} + \mathrm{Res}_{z=-4} \mathbf{H}(z) z^{k-1} = \frac{z^k}{z+4}\bigg|_{z=-2} + \frac{z^k}{z+2}\bigg|_{z=-4} \\ &= \frac{1}{2}(-2)^k - \frac{1}{2}(-4)^k = (-1)^k 2^{k-1} + (-1)^{k-1} 2^{2k-1}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Toinen tapa ratkaista tehtävä on huomata siirtofunktion yhteys Laurentin sarjaan. Siten impulssivaste laskettiin itse asiassa jo tehtävässä 1 b).

b) Lasketaan vaste Z-muunnoksen avulla. Teorian ja koekaavojen mukaan vasteen $y(n)$ Z-muunnos $Y(z)$ voidaan laskea kaavalla $Y(z) = \mathbf{H}(z) X(z)$, missä $\mathbf{H}(z)$ on siirtofunktio ja $X(z)$ on herätteen $x(n)$ Z-muunnos.
Lasketaan ensin annetun herätteen Z-muunnos, joka määritelmän mukaan on

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = 1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}.$$

Kirjoitetaan tämän jälkeen siirtofunktio muodossa

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z}{z^2(1 + 6z^{-1} + 8z^{-2})} = \frac{z^{-1}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}.$$

Edellä lasketun perusteella vasteen Z-muunnos on

$$Y(z) = z^{-1} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \cdots = Z(\delta(n-1)),$$

eli vaste on yhdellä aikayksiköllä viivästetty yksikköimpulssi

$$\delta(n-1) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

c) Teorian mukaan LTI-systeemi on stabiili täsmälleen silloin, kun siirtofunktion navat ovat yksikköympyrän sisällä. Koska nyt siirtofunktion navat ovat yksikköympyrän ulkopuolella, systeemi ei ole stabiili.