Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

1. välikoe 3.10.2022

1. a) Määrää itseisarvo ja argumentin pääarvo kompleksiluvulle

$$z = \frac{1}{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^4}.$$

b) Ratkaise yhtälö

$$z^4 = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Anna molempien kohtien luvut muodossa $z = x + \mathrm{i}y$.

2. Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = (z+1)(\overline{z}+1).$$

a) Kirjoita f muodossa $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, missä $z = x + \mathrm{i}y$. (2p)

b) Missä pisteissä funktiolla f on derivaatta? (3p)

c) Määrää ympyrän $(x+1)^2 + y^2 = 1$ kuvajoukko funktiolle $f(z)$. (1p)

3. Olkoon C origokeskinen 5-säteinen ympyrä. Tarkastellaan kompleksista käyräintegraalia

$$I = \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z.$$

a) Määrää käyrän C parametriesitys. (1p)

b) Laske integraali I, kun C kierretään kertaalleen vastapäivään. (4p)

c) Mikä yhteys integraalilla I on käyrän C sisältämän alueen pinta-alaan? (1p)

Koekaavat

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

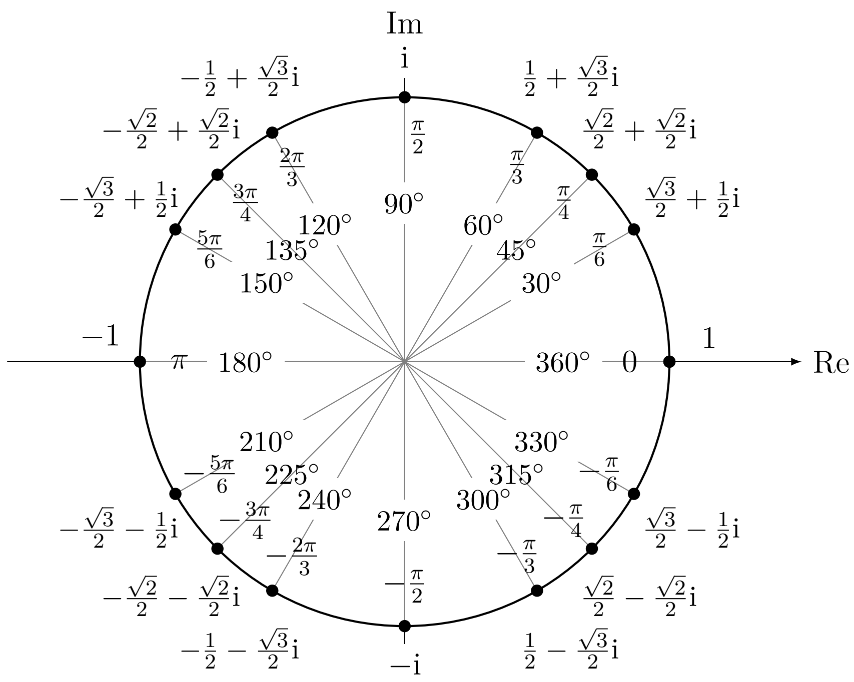
$$X(\omega) = \sum_n x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. Kirjoitetaan luvulle $w = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ eksponenttiesitys, sillä sitä voidaan hyödyntää molemmissa kohdissa. Itseisarvoksi saadaan $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, jolloin w voidaan kirjoittaa muodossa

$$w = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},$$

missä toinen yhtäsuruus saadaan yksikköympyrästä.

a) Käytetään hyväksi eksponenttiesitystä. Edellä lasketun mukaan

$$z = \frac{1}{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^4} = \frac{1}{16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{3}}} = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{8\pi}{3}},$$

jonka mukaan itseisarvo on $|z| = \frac{1}{16}$ ja argumentin pääarvo on $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{2\pi}{3}$, sillä $-\frac{8\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi$ ja $-\frac{2\pi}{3} \in (-\pi, \pi]$.
Perusmuotoiseen esitykseen $z = x + \mathrm{i}y$ päästään yksikköympyrän avulla, jonka mukaan

$$z = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}\mathrm{i}.$$

b) Kirjoitetaan z muodossa $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, jolloin

$$z^4 = r^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\varphi} = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right)},$$

josta saadaan yhtälöt $r^4 = 2$ ja $4\varphi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, joiden ratkaisut ovat $r = \sqrt[4]{2}$ ja $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Saadaan 4 eri ratkaisua

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{2}}{2},\\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2},\\
z_2 &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{2}}{2},\\
z_3 &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Toisissa yhtäsuuruuksissa on käytetty yksikköympyrää.

2. a) Koska $(z+1)\cdot(\overline{z}+1) = (z+1)(\overline{z+1}) = |z+1|^2 = |(x+1)+\mathrm{i}y|^2 = (x+1)^2 + y^2$, saadaan

$$f(z) = |z+1|^2 = \underbrace{(x+1)^2 + y^2}_{=u(x,y)} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{0}_{=v(x,y)}.$$

b) Luentojen mukaan f:llä on derivaatta niissä pisteissä $z_0 \in \mathbb{C}$, joissa Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa ja joissa osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x, v_y ovat olemassa pisteen z_0 ympäristössä ja ovat jatkuvia pisteessä z_0. Nyt u ja v ovat ”siistejä” funktioita, joten osittaisderivaattojen olemassaolo ja jatkuvuus ei ole mikään ”issue”. Näin ollen riittää tutkia Cauchy-Riemannin yhtälöitä

$$u_x = 2(x+1) = 0 = v_y \quad \text{ja } u_y = 2y = 0 = -v_x,$$

jotka toteutuvat täsmälleen silloin, kun $x = -1$ ja $y = 0$.

c) Koska $f(z) = (x+1)^2 + y^2$, on kyseisen ympyrän kuvajoukko yksittäinen piste $f(z) = 1$.

3. a) Origokeskisen 5-säteisen ympyrän parametriesitys on $z(\theta) = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) Lasketaan integraali parametriesityksen. Kompleksisen käyräintegraalin määritelmän mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z(\theta))z'(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

johon sijoittamalla $z(\theta) = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ja $z'(\theta) = 5\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ saadaan

$$I = \int_C \overline{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \cdot 5\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 25\mathrm{i}\mathrm{d}\theta = 50\pi\mathrm{i}.$$

c) Ympyrän pinta-alan kaavan mukaan käyrän C sisältämän alueen pinta-ala A on $A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$, joten pinta-alalla ja integraalilla on yhteys $I = 2\mathrm{i}A$. Tämä yhteys pätee itse asiassa yleisemminkin mille tahansa sulkeutuvalle Jordan-käyrälle.