KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 7, syksy 2021

Pistetehtävä on 3.

1. Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä käytetään desimointioperaatiota $\downarrow 2$, jossa alkuperäisestä näytteistetystä signaalista poimitaan parilliset näytteet. Matemaattisesti suhteella 2 desimointi vastaa systeemiä, jonka vaste $y(n)$ määräytyy herätteestä $x(n)$ kaavalla

$$y(n) \overset{\text{merk.}}{=} x_{\downarrow 2}(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Määritellään jono $c_2(n))_{n=0}^{\infty}$ asettamalla

$$c_2(n) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n}), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Osoita, että kaikille jonoille $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ pätee tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n)c_2(2n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2}.$$

b) Laske desimoidun signaalin Z-muunnos $X_{\downarrow 2}(z) = \mathcal{Z}(x_{\downarrow 2})(z)$ käyttämällä identiteettiä

$$x_{\downarrow 2}(n) = x(2n) = x(2n)c_2(2n)$$

ja a)-kohdan tulosta.

2. Diskreetin kausaalisen LTI-systeemin siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z}{z^2 + 7z + 12}.$$

Määrää systeemin impulssivaste käyttämällä kaavaa

$$h(k) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z,$$

missä S_r sulkee sisäänsä kaikki $\mathbf{H}(z)$:n navat.

3. Erään kausaalisen digitaalisen toisen kertaluvun Butterworth alipäästösuodattimen siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})z^{-2}} = \frac{(z + 1)^2}{(2 + \sqrt{2})z^2 + (2 - \sqrt{2})}.$$

Laske suodattimen impulssivaste käyttämällä

a) geometrisen sarjan summakaavaa.

b) osamurtokehitelmää.

Mikä on systeemin vaste herätteelle

$$(x(n))_{n=0}^{\infty} = (2 + \sqrt{2}, 0, 2 - \sqrt{2}, 0, 0, \ldots), \quad \text{jolle } x(n) = 0, \text{ kun } n \geq 3?$$

4. Laske amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\theta(\omega) = \arg H(\omega)$ 5 pisteen paraboliselle suodattimelle, jonka impulssivaste on

$$(h(n))_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{35}(-3, 12, 17, 12, -3, 0, 0, \ldots).$$

5. Määrää amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\theta(\omega) = \arg H(\omega)$ suodattimelle, joka määritellään differenssiyhtälöllä

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2),$$

missä $x(n)$ on heräte ja $y(n)$ on vaste. Kirjoita taajuusvastefunktiolle $H(\omega)$ esitys $H(\omega) = R(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}$, missä $R(\omega)$ ja $\phi(\omega)$ ovat reaalisia. Määrää amplitudivasteen nollakohdat.

6. Tarkastellaan kertalukua 2 olevaa digitaalista AR-suodatinta, joka määritellään differenssiyhtälöllä

$$y(n) = 2r\cos(\omega_0)y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n), \tag{1}$$

missä $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$, $0 < r \in \mathbb{R}$ sekä $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ on suodattimen heräte ja $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ on sitä vastaava vaste.

a) Laske suodattimen siirtofunktio ottamalla Z-muunnos puolittain yhtälössä (1).

b) Laske suodattimen taajuusvastefunktio ja tutki parametrien r ja ω_0 merkitystä. Millä ehdoilla suodatin on stabiili? Jos $r = 1$, niin mitä tapahtuu, kun $\omega \to \omega_0$?

c) Laske Z-käänteismuunnoksella suodattimen impulssivaste, kun $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ja $r = 0{,}9$.