KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 6, syksy 2021

Pistetehtävät ovat 1 ja 5.

1. Määrää erikoispisteet, niiden laatu ja residyt erikoispisteissä funktioille
   a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z^4}$.
   b) $f(z) = \frac{1}{az^2+bz+c}, \quad a \neq 0$.
   c) $f(z) = \frac{\exp(1/z^2)}{z-1}$. Tässä on hyödyllistä miettiä, miten funktio käyttäytyy origon ympäristössä. Tutki erityisesti, mitä tapahtuu, kun $z \to 0$ imaginaariakselia pitkin. Huomaa, että jos z_0 olisi napa, niin $|f(z)| \to \infty$, kun $z \to z_0$.

2. a) Tutki funktion
   $$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + k^2}$$
   napojen sijaintia parametrin $k \in \mathbb{R}$ eri arvoilla. Määrää yksikköympyrän sisällä olevien napojen lukumäärä eri k:n arvoilla.
   b) Määrää residyt navoissa a)-kohdan funktiolle.

3. Laske integraali
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} \mathrm{d}x.$$

4. Laske residylaskun avulla analogisen suodattimen $H(f)$, jolle $|H(f)|^2 = \frac{9}{f^4+10f^2+9}$, ekvivalentti kaistanleveys
   $$W_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f}{2|H(0)|^2}.$$

5. Laske residylaskun ja sijoituksen $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avulla integraali
   $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \sin\theta}.$$
   Piirrä kuva sijoituksen jälkeisestä integrointipolusta ja integrandin erikoispisteistä.
   Vihje: Esitä sini eksponenttifunktion avulla, jossa $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{z}$.

6. Laske funktion
   $$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$
   Fourier-muunnos $F(a)$ tarkastelemalla ensin tapausta $a < 0$. Käytä f:n parillisuutta tapauksessa $a > 0$.