KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 5, syksy 2021

Pistetehtävät ovat 3 ja 5.

1. Tutki, onko jonolla

$$z_n = 2 + \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} z_n$. Onko luvun z_n argumentin pääarvolla raja-arvoa, kun $n \to \infty$? Vertaa tulosta luentoviikon 5 Esimerkkiin 1.

2. Tarkastellaan samalla taajuudella, mutta eri vaiheessa värähtelevien kosiniaaltojen summaa

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t) + A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + \cdots + A_N \cos(\omega t + \delta_N). \tag{1}$$

a) Viiveen kontrollointi on tärkeää esimerkiksi akustiikassa. Oletetaan, että

$$N = 3, \quad A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 1 \quad \text{ja} \quad \delta_k = k\delta, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kirjoita summa muodossa $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ ja laske summan amplitudi A ja vaihekulma ϕ. Mikä on amplitudin A maksimiarvo ja millä viiveen δ arvolla se saavutetaan? **Vihje:** Käytä hyväksi esitystä

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+2\delta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+3\delta)}\right)$$

ja käytä geometrisen summan kaavaa.

b) Oletetaan, että amplitudit vaimenevat lain $|A_k| \le Ck^{-\alpha}$ mukaisesti. Millä parametrin α arvolla esityksestä (1) saatava sarja, kun $N \to \infty$, suppenee itseisesti?

3. a) Laske funktion

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i} + z}$$

Taylorin sarjan pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä.

b) Minkä (alkeis)funktion Taylor-sarja on

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{k+1} (z - \mathrm{i})^k?$$

Määrää myös sarjojen suppenemiskiekot.

4. Laske LTI-systeemin, jonka siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1}{z + z^2},$$

impulssivaste, kun H:ta tarkastellaan alueessa

a) $0 < |z| < 1$.

b) $|z| > 1$.

5. Missä pisteissä seuraavat funktiot ovat analyyttisiä? Laske Laurentin sarja funktiolle

a) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-4)^3}$ alueessa $0 < |z - 4| < R$. Mikä on suurin mahdollinen $R > 0$, jolla sarjaesitys on voimassa?

b) $f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^3}$ alueessa $|z| > 0$. Tässä voit ottaa tunnettuna sinin sarjakehitelmän

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$