

# KOMPLEKSIANALYYSI

## Harjoitus 4, syksy 2021

Pistetehtävät ovat 2 ja 4.

1. Laske

$$\int_C f(z) dz,$$

kun  $C$  on paraabelin  $y = x^2$  kaari pisteestä 0 pisteeseen  $1 + i$  ja

a)  $f(z) = z^2$ .

b)  $f(z) = |z|^2$ .

2. Laske  $\int_C f(z) dz$ , kun  $C$  on ympyrä  $|z - 1| = 1$  ja

a)  $f(z) = (\overline{z - 1})^2$ .

b)  $f(z) = (z - 1)^2$ .

Onko funktiolla  $f$  olemassa integraalifunktiota kummassakaan tapauksessa? Jos on, niin laske integraali integraalifunktion avulla.

3. Laske  $\int_C f(z) dz$  funktiolle  $f(z) = z^i$  haaralle

$$z^i = \exp(i \operatorname{Log} z), \quad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi,$$

kun  $C$  on puoliympyrä  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

4. Laske  $\int_C f(z) dz$ , kun  $C$  on kuvan 1 mukainen Bernoullin lemniskaatta kerran nuolen suuntaan kierrettynä, ja

a)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1},$$

b)

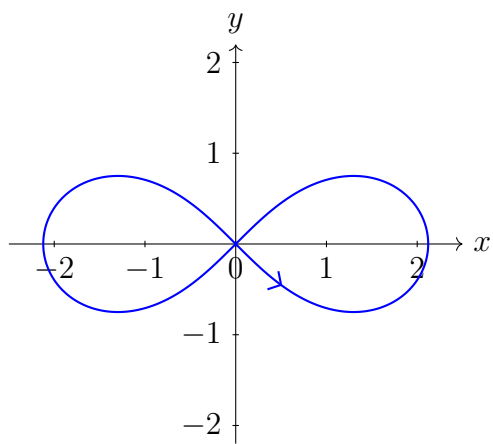
$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1},$$

5. Laske (yksi kierros positiiviseen suuntaan)

$$\int_{|z|=2} \frac{4z \sin z}{z^2 + 2iz + 3} dz.$$

Anna vastaus muodossa  $a + ib$ .

6. Laske  $\int_C \frac{e^{2z}}{z^3} dz$ , kun  $C$  on positiivisesti suunnistettu neliö, jonka kärkipisteet ovat  $-1 - i$ ,  $1 - i$ ,  $1 + i$  ja  $-1 + i$ .



Kuva 1: Bernoullin lemniskaatta