

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 3, syksy 2021

Pistetehtävät ovat 2 ja 3.

1. Laske derivaatta funktioille

a) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$

b) $f(z) = f(x + iy) = e^{-x}((x \sin y - y \cos y) + i(y \sin y + x \cos y))$,

c) $f(z) = z^{1/2}$, käyttämällä käänteisfunktion derivoimissääntöä

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w = f(z).$$

Huomaa, että f on moniarvoinen.

2. Tutki Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla, missä pisteissä $z = x + iy \in \mathbb{C}$ seuraavilla funktioilla $f(z)$ on derivaatta:

a) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - 3x + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$.

b) $f(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$. Mikä z :n funktio tässä on kyseessä?

Missä pisteissä edellä olevat funktiot ovat analyyttisiä? Määrää funktioiden kuvajoukot imaginaariakselille.

3. Tutki, onko funktio $u(x, y) = xy - x + y$ harmoninen. Jos on, niin määrää kaikki analyyttiset funktiot f , jolle $\operatorname{Re} f = u$.

4. Tarkista konformisuuden ehdot funktiolle $f(z) = z^2$ pisteessä $z_0 = 1 + 2i$ tarkastelemalla suoraa $z = 1 + it$, $z = t + 2ti$ ($t \in \mathbb{R}$) ja niiden kuvia funktiolle f .

5. Tarkastellaan kenttää, jonka potentiaalifunktio on $f(z) = z + \frac{1}{z}$ (Joukowskin funktio).

a) Tutki, missä alueen $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ pisteissä f on konforminen.

b) Mitä käyriä pitkin ulkoinen varaus liikkuu alueessa Ω ?

6. Rakennellaan tässä tehtävässä sähköstaattinen potentiaali ϕ , joka saa arvon nolla yksikkökieron $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ reunan ylemmällä puolikaarella ja arvon yksi alemmalla puolikaarella. Katso Kuva 1.

a) Funktio

$$w = f(z) = i \frac{1 - z}{1 + z}$$

kuvaa yksikkökieron ylempään puolitasoon $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Tutki funktion saamia arvoja uv -tasossa xy -tason ympyränkaarilla $\mathbb{S}_{\pm} = \{|z| = 1 \mid \pm \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

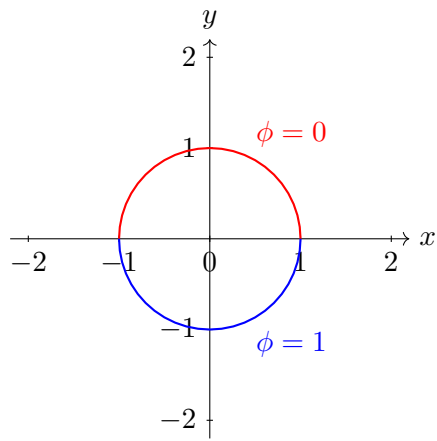
b) Osoita, että logaritmfunktion

$$g(w) = \log w = \ln |w| + i \arg(w), \quad 0 < \arg(w) < \pi,$$

reaali- ja imaginaariosa ovat harmonisia funktioita ylemmässä puolitasossa. Tutki reaali- ja imaginaariosan saamia arvoja ympyränkaarien \mathbb{S}_{\pm} kuvajoukoissa $f(\mathbb{S}_{\pm})$.

c) Voidaan osoittaa, että harmonisuus säilyy konformikuvauksessa. Toisin sanoen, jos g on harmoninen alueessa B ja $f : A \rightarrow B$ on konforminen, niin $g \circ f$ on harmoninen alueessa A . Osoita, että etsitty potentiaali ϕ löydetään a)- ja b)-kohtien funktioiden avulla.

d) Mitä käyriä ovat tasapotentiaalit $\phi(x, y) = c$, $0 < c < 1$?



Kuva 1: Tehtävän 6 kuva