

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 2, syksy 2021

Pistetehtävät ovat 1 ja 3.

1. Ratkaise yhtälö

a) $e^{iz} = \sqrt{5} - 2$.

b) $\sin z = 2i$.

2. Mitä arvoja saa

a) $i^{-2/3}$?

b) $\log(2 + 2\sqrt{3}i)$? Määrää myös pääarvo.

c) $(1 - i)^i$?

3. a) Kirjoita funktio

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{1}{z + 1}$$

muodossa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

b) Määrää yksikkökiekon ylemmän puolikkaan

$$\mathbb{D}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

kuvajoukko a)-kohdan funktiolle. Sitä varten valitse yksi sisäpiste $z_0 \in \mathbb{D}_+$ ja määrää alueen \mathbb{D}_+ reunan osille sopivat parametriesitykset, joilla reuna on *positiivisesti suunnistettu*. Tämä tarkoittaa, että alue jää vasemmalle puolelle, kun reunalla edetään suunnistuksen mukaan. Laske sisäpisteen ja reunan osien kuvajoukot. Onko myös kuvajoukon suunnistus positiinen? Tässä käytetään ominaisuutta, että analyttisellä funktiolla sisäpisteet kuvautuvat sisäpisteiksi ja alueen reuna kuvautuu kuvajoukon reunaksi.

4. Muotoa

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

olevaa kompleksimuuttujan z funktiota sanotaan *Möbius-kuvaukseksi*. Määrää se Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 0 \quad \text{ja} \quad z_3 = 1$$

pisteille

$$w_1 = -i, \quad w_2 = 1 \quad \text{ja} \quad w_3 = i,$$

missä $w_i = f(z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Mikä on reaaliakselin kuva tälle Möbius-kuvaukselle?

5. Määrää funktion $w = z^2$ kuvajoukko

a) suoralle $x = 1$,

b) hyperbelille $xy = 1$,

c) ympyrälle $|z - 1| = 1$.

6. Tarkastellaan logaritmfunktion päähaaraa

$$w = \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

- a) Määrää origokeskisten a -säteisten ympyröiden kuvat, kun $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. Piirrä kuvaajat sekä z -tasossa että w -tasossa.
- b) Määrää origosta lähtevien säteiden kuvat, kun säteen ja positiivisen x -akselin välinen kulma on $\alpha = -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. Piirrä kuvaajat sekä z -tasossa että w -tasossa.
- c) Tarkastele a)- ja b)-kohdan käyrien ja niiden kuvien välisten kulmien muuttumista. Laske esimerkiksi säteen, jolle $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ja 1-säteisen ympyrän välistä kulmaa sekä edellisten käyrien kuvien välistä kulmaa. Toista sama muille säteille ja ympyröille. Käyrien välisellä kulmalla tarkoitetaan niiden leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välistä kulmaa.