

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 1, syksy 2021

Pistetehtävät ovat 1 ja 3.

1. Määää kompleksiluvun $z = (1 + \sqrt{3}i)^4$
 - a) reaali-osa, imaginaari-osa ja itseisarvo.
 - b) eksponenttitys. Mikä on argumentin pääarvo? Päteekö kompleksiluvuille yleisesti kaava $\text{Arg}(z^4) = 4 \cdot \text{Arg}(z)$?
2.
 - a) Kirjoita Eulerin kaavan avulla sinimuotoinen signaali $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ muodossa $\text{Re}(\alpha e^{i\omega t})$. Tällä tavalla saatua ”kompleksista amplitudia” α sanotaan sähkötekniikassa **faasoriksi**.
 - b) Määää faasori kulmataajuudella ω värähtelevälle yleiselle sinimuotoiselle jännitteelle

$$A_1 \cos(\omega t + \gamma_1) + A_2 \cos(\omega t + \gamma_2) + \dots + A_m \cos(\omega t + \gamma_m) \\ B_1 \sin(\omega t + \delta_1) + B_2 \sin(\omega t + \delta_2) + \dots + B_m \sin(\omega t + \delta_m).$$

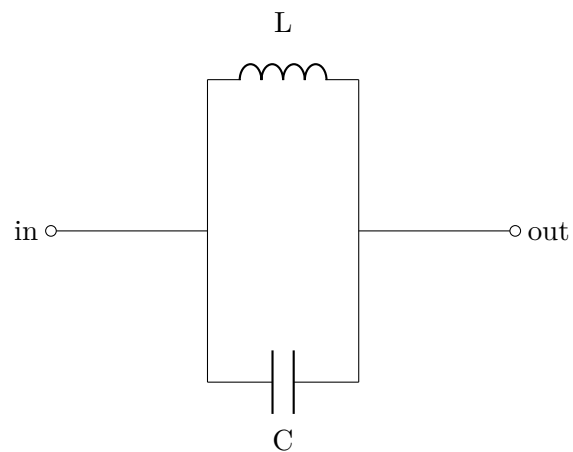
Mikä on faasorin reaali-osa ja imaginaari-osa?

3.
 - a) Määää kompleksiluvun $w = -1$ juuret $\sqrt[4]{w}$.
 - b) Ratkaise yhtälö $-z^4 = (z - 1)^4$.

Piirrä molempien kohtien ratkaisut kompleksitasoon. Havaitsetko mitään säännönmukaisuutta ratkaisuihissa?

4.
 - a) Määää yhtälön $z^4 + z^2 + 1 = 0$ juuret.
 - b) Hajota $z^4 + z^2 + 1$ kahden toisen asteen reaalikertoimisen polynomin tuloksi käyttämällä hyväksi a)-kohdan juuria.
5. Piirrä niiden kompleksilukujen $z \in \mathbb{C}$ joukko, missä toteutuu ehto
 - a) $z^3 + z = 0$.
 - b) $\text{Re}(\log z) = 0$.
 - c) $\text{Arg}(z^2) \leq 0$.

6. Kuvassa 1 on vaihtovirtapiirin LC-komponentti.



Kuva 1: LC-komponentti

- a) Laske komponentin impedanssi ja määrää sen eksponenttitesitys.
- b) Määrää komponentin resonanssitaajuus.
- c) Miten komponentti vastustaa virtaa pienillä taajuuksilla ($\omega \rightarrow 0$) ja suurilla taajuuksilla ($\omega \rightarrow \infty$)?