# Tekniikan matematiikka

# Kompleksianalyysi (031077P)

## Loppukoe 18.11.2021

1. Olkoot $v = (1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{2021}$ ja $w = (\sqrt{3}-\mathrm{i})^{2021}$ kompleksilukuja. Ilmoita kompleksiluku $z$ muodossa $z = x + \mathrm{i}y$ ja määrää luvun $z$ argumentin pääarvo, kun

   a) $z = v \cdot w$,

   b) $z = \frac{v}{w}$.

2. a) Kirjoita funktio

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{z^2}$$

   muodossa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. (2p)

   b) Esitä alue

$$\mathbb{D}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

   napakoordinaateissa ja piirrä se kompleksitasoon. Määrää alueen $\mathbb{D}_+$ kuvajoukko a)-kohdan funktiolle. Piirrä kuvajoukko kompleksitasoon. (4p)

3. Kertalukua 2 olevan Butterworth-suodattimen taajuusvastefunktio $H(\omega)$ määräytyy kaavasta

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^4}.$$

   Laske residylaskun avulla suodattimen ekvivalentti kaistanleveys $W_{eq}$, joka määritellään kaavalla

$$W_{eq} = \frac{1}{2|H(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

4. Signaalinkäsittelyssä käytetään ikkunointia impulssivasteen katkaisemiseksi. Tarkastellaan Bartlett-ikkunaa

$$w(n) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{n-\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} \right|, & 0 \le n \le N, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

   missä $N$ on jokin nollasta poikkeava kokonaisluku.

   a) Laske Bartlett-ikkunan $Z$-muunnos $\mathbf{W}(z)$ tapauksessa $N = 4$. (2p)

   b) Laske Bartlett-ikkunan amplitudivaste $|W(\omega)|$ ja vaihevaste $\mathrm{Arg}(W(\omega))$ tapauksessa $N = 4$. (4p)

# Koekaavat

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z - z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

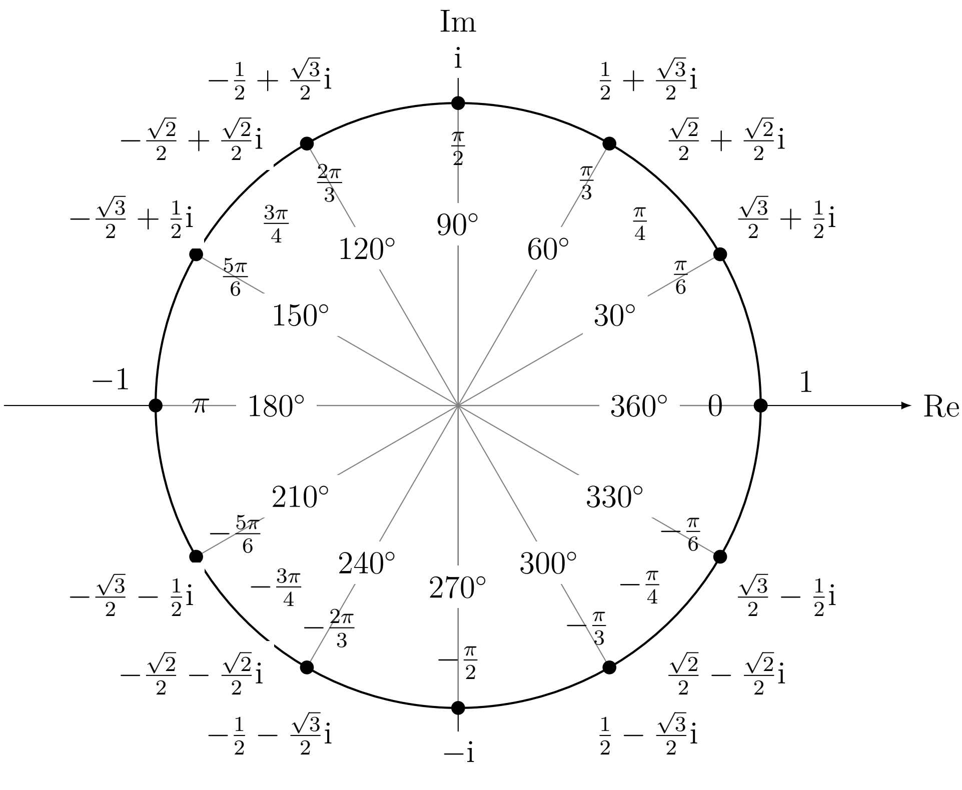
$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1}\mathrm{d}z$$

### Yksikköympyrä



# Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. Käytetään hyväksi eksponenttiesitystä. Sitä varten muodostetaan ensin kantalukujen eksponenttiesitykset. Koska $|1+\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$, voidaan kirjoittaa

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).$$

Sulkulausekkeen sisällä oleva luku löytyy yksikköympyrästä, jonka avulla löydetään $v$:lle eksponenttiesitys

$$v = (1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{2021} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2021} = 2^{2021}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2021}{3}\pi},$$

missä $\varphi := \frac{2021}{3}\pi$ on eräs argumentin arvo. Pääarvo löydetään, kun etsitään sitä vastaava edustaja väliltä $]-\pi,\pi]$. Koska $\frac{2022}{6} = 337$, saadaan

$$\varphi = \frac{2021}{3}\pi = \frac{2022-1}{6}\cdot 2\pi = 337\cdot 2\pi - \frac{1}{3}\pi,$$

joten $\operatorname{Arg}(v) = -\frac{1}{3}\pi$.

Vastaavalla tavalla löydetään eksponenttiesitys

$$w = (\sqrt{3}-\mathrm{i})^{2021} = \left(2\left(\sqrt{3}2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right)^{2021} = \left(2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^{2021} = 2^{2021}\mathrm{e}^{-\frac{2021}{6}\pi\mathrm{i}}.$$

Koska $\frac{2016}{12} = 168$, saadaan laskemalla

$$\frac{2021}{6}\pi = \frac{2016+5}{12}\cdot 2\pi = 168\cdot 2\pi + \frac{5}{6}\pi,$$

joten $\operatorname{Arg}(w) = -\frac{5}{6}\pi$.

a) Edellä lasketun perusteella

$$z = v\cdot w = 2^{2021}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}\cdot 2^{2021}\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}} = 2^{4042}\mathrm{e}^{-\frac{7}{6}\pi\mathrm{i}},$$

sillä $\frac{1}{3}+\frac{5}{6} = \frac{7}{6}$. Argumentin pääarvo on siten $\operatorname{Arg}(v\cdot w) = -\frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{5}{6}\pi$. Eulerin kaavan ja yksikköympyrän avulla saadaan

$$\begin{aligned} z &= 2^{4042}\mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}} = 2^{4042}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\mathrm{i}\right) \\ &= -2^{4041}\sqrt{3} + 2^{4041}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

b) Vastaavalla tavalla kuin edellä saadaan

$$z = \frac{v}{w} = \frac{2^{2021}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}}{2^{2021}\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{i},$$

sillä $-\frac{1}{3}-(-\frac{5}{6}) = \frac{5}{6}-\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Argumentin pääarvo on siis $\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{2}\pi$.

2. a) Lavennetaan rationaalifunktio sen nimittäjän konjugaatilla $\overline{z^2} = \overline{z}^2$ ja käytetään identiteettiä $z\overline{z} = |z|^2$, jolloin saadaan

$$f(z) = \frac{\overline{z}^2}{z^2\overline{z}^2} = \frac{\overline{z}^2}{(z\overline{z})^2} = \frac{\overline{z}^2}{|z|^4} = \frac{(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{i}.$$

b) Napakoordinaateissa ilmaistuna $|z| = r$ ja $\mathrm{Im}(z) = y > 0$ tarkoittaa, että $\varphi = \mathrm{Arg}(z) \in (0, \pi)$. Alue $\mathbb{D}_+$ on geometrisesti yksikkökiekon ylempi puolikas. Käytetään hyväksi eksponenttiesitystä $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ kuvajoukon määräämisessä. Kuvapisteen eksponenttiesitykseksi saadaan

$$f(z) = f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \frac{1}{\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2} = \frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-2\varphi\mathrm{i}}.$$

Koska $0 < \varphi < \pi$ ja $r < 1$, on $-2\pi < -2\varphi < 0$ ja $1/r^2 > 1$, joten kuvapiste on yksikkökiekon ulkopuolella oleva piste positiivista reaaliakselia lukuun ottamatta.
Koska argumentti $\mathrm{Arg}(f(z))$ käy läpi kaikki arvot väliltä $(-\pi, \pi)$ nollaa lukuun ottamatta ja samoin $1/r^2$ kattaa kaikki arvot väliltä $(1, \infty)$, on alueen $\mathbb{D}_+$ kuvajoukko $f(\mathbb{D}_+)$ on yksikkökiekon $\mathbb{D}$ ulkopuolinen alue positiivista reaaliakselia lukuun ottamatta.

3. Lasketaan aluksi integrandin $f(\omega) = |H(\omega)|^2$ nimittäjän nollakohdat, jotka ovat teorian mukaan napoja, koska $f$ on supistetussa muodossa oleva rationaalifunktio. Navat ovat luvun $-1$ juuret $\sqrt[4]{-1}$, joiksi eksponenttiesityksen $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+k2\pi)}$ avulla saadaan

$$\omega^4 = -1 \Leftrightarrow \omega_k := \mathrm{e}^{\frac{2k+1}{4}\pi\mathrm{i}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Teorian mukaan riittää huomioida ainoastaan ylemmän puolitason navat

$$\omega_0 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \quad \text{ja} \quad \omega_1 = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}},$$

jotka molemmat ovat yksinkertaisia. Silloin residylaskun ja ”kätevän laskukaavan” mukaan saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{\omega=\omega_0} f(\omega) + \mathrm{Res}_{\omega=\omega_1} f(\omega)\right) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4\omega_0^3} + \frac{1}{4\omega_1^3}\right).$$

Yksikköympyrän avulla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\omega_0^3} + \frac{1}{4\omega_1^3} &= \frac{1}{4\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}} + \frac{1}{4\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{4}\mathrm{i}}} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Koska lisäksi $|H(0)|^2 = 1$, on ekvivalentti kaistanleveys

$$W_{eq} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. a) Lasketaan Bartlett-ikkunan arvot ajanhetkillä $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Koska

$$\left|\frac{0 - \frac{4}{2}}{\frac{4}{2}}\right| = \left|\frac{4 - \frac{4}{2}}{\frac{4}{2}}\right| = 1,$$

on $w(0) = w(4) = 0$. Vastaavasti saadaan

$$w(1) = 1 - \left|\frac{1-2}{2}\right| = \frac{1}{2} = w(3) \quad \text{ja} \quad w(2) = 1.$$

Siten Bartlett-ikkunan ainoat nollasta poikkeavat arvot ovat $w(1) = \frac{1}{2}, w(2) = 1$ ja $w(3) = \frac{1}{2}$.
Määritelmän mukaan Z-muunnokseksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} w(n)z^{-n} = \frac{1}{2}z^{-1} + 2z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} = \frac{1}{2}z^{-1}(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \\ &= \frac{1}{2}z^{-1}(1 + z^{-1})^2.\end{aligned}$$

b) Taajuusvaste $W(\omega)$ saadaan sijoituksella $W(\omega) = \mathbf{W}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$. Siten taajuusvaste on

$$W(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\omega}{2}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}\mathrm{i}}\right)\right)^2 = 2\mathrm{e}^{-2\omega\mathrm{i}}\cos^2(\omega/2).$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin kosinin määritelmää

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$$

arvolla $z = \omega/2 \in \mathbb{R}$.
Amplitudivaste on vaihevasteen itseisarvo, eli $|W(\omega)| = 2\cos^2(\omega/2)$. Vaihevaste taasen on taajuusvasteen argumentin pääarvo, eli

$$\mathrm{Arg}(H(\omega)) = \begin{cases} -2\omega - 2\pi, & \text{kun } -\pi < \omega < -\pi/2, \\ -2\omega, & \text{kun } -\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2, \\ -2\omega + 2\pi, & \text{kun } \pi/2 < \omega \leq \pi. \end{cases}$$