Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 28.10.2021

1. Laske funktiolle

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

sarjaesitys, jonka keskipiste on $z = 1$,

a) Taylorin sarjana. Ilmoita myös sarjaesityksen suppenemiskiekko.

b) Laurentin sarjana alueessa $|z-1| > 1$.

2. Määrää erikoispisteet ja niiden laatu funktiolle

a)

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z^3}.$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

3. Erään kausaalisen diskreetin FIR-suodattimen impulssivaste on jono

$$(h(n))_{n=0}^{\infty} = (1, -2, 1, 0, 0, \dots), \quad \text{jolle } h(n) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 3.$$

a) Laske suodattimen siirtofunktio. (2p)

b) Laske suodattimen vaste, kun herätteenä on yksikköaskeljono

$$(x(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 1, \dots), \quad \text{jolle } x(n) = 1 \text{ kaikilla } n \geq 0.$$

(3p)

c) Laske suodattimen amplitudivaste. Mitä suodatin tekee pienille taajuuksille $\omega \approx 0$? (3p)

Koekaavat

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z - z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

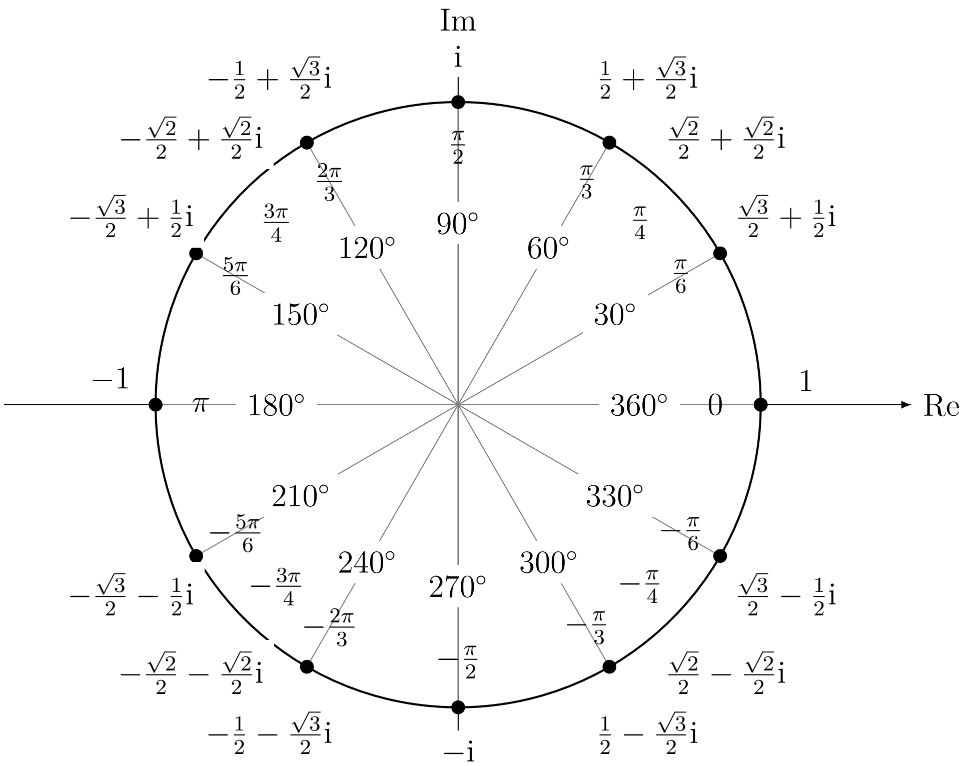
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n - k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n - k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Taylorin sarja voidaan tällä kurssilla laskea joko derivoimalla annettua funktiota tai käyttämällä geometrisen sarjan summakaavaa. Koska meillä on nyt kohtuullisen yksinkertainen funktio, molemmat tavat onnistuvat kohtuullisella työllä. Käydään ne läpi.

Tapa I (Derivointi): Derivoimalla annettua potenssifunktiota $f(z) = z^{-1}$ toistuvasti saadaan

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^{-1} & &\Rightarrow f(1) = 1,\\
f'(z) &= -z^{-2} & &\Rightarrow f'(1) = -1,\\
f''(z) &= (-1)(-2)z^{-3} & &\Rightarrow f''(1) = (-1)(-2),\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(z) &= (-1)(-2)\dots(-n)z^{-n-1} & &\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^n n!.
\end{aligned}$$

Edellisten laskujen ja Taylorin sarjan määritelmän

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

mukaan saadaan Taylorin sarjaksi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Tässä pitää kuitenkin vielä täsmentää, missä alueessa sarjakehitelmä on olemassa. Täytyy siis laskea sarjan suppenemissäde ja sitä kautta suppenemiskiekko. Suppenemissäteen laskemiseen löytyy oma laskentakaava, mutta perustellaan tässä suppenemissäde geometrisesti. Koska sarjan keskipiste on $z_0 = 1$, on suppenemissäde suurin mahdollinen arvo R, jolla f on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < R\}$. Koska pistettä $z_0 = 1$ lähin ”paha piste” on origo, jossa f ei ole määritelty eikä siten analyyttinen, on $R = 1$. Edellisen perusteella suppenemiskiekko on

$$\mathbb{D}(1,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < 1\},$$

eli geometrisesti kyseessä on 1-säteisen ympyrän, jonka keskipiste on $z_0 = 1$, sisään jäävä alue.

Tapa II (Geometrinen sarja): Käytetään hyväksi geometrisen sarjan summakaavaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}, \quad |w| < 1,$$

”sopivasti valitulla” w. Sitä varten muokataan funktiota f seuraavasti

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{1 - \underbrace{(-(z-1))}_{=w}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin potenssin laskusääntöä $(-(z-1))^n = (-1)^n(z-1)^n$. Huomaa, että suppenemiskiekko saatiin tällä laskentatavalla suoraan geometrisen sarjan suppenemiskriteeristä.

b) Tämä voidaan laskea joko residylaskun tai geometrisen sarjan summakaavan avulla. Käydään tässäkin läpi molemmat tavat.

Tapa I (Residylasku): Kaavakokoelman mukaan Laurentin sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kertoimet a_n voidaan esittää kompleksisena käyräintegraalina

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

missä S_r on r-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on z_0 ja joka sisältyy analyyttisyysalueeseen. Tässä tehtävässä siis $r > 1$.

Kun $n \geq 0$, on integrandilla

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} = \frac{1}{z(z-1)^{n+1}}$$

yksinkertainen napa $z_1 = 0$ ja *kertalukua* $n+1$ oleva napa $z_2 = 1$ integrointitien S_r sisällä. Lasketaan residyt navoissa. Residyksi origossa saadaan

$$\mathrm{Res}_{z=0} g(z) = \lim_{z \to 1} \left(z \frac{1}{z(z-1)^{n+1}} \right) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}.$$

Residyksi pisteessä $z = 1$ saadaan

$$\mathrm{Res}_{z=1} g(z) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left((z-1)^{n+1} \frac{1}{z(z-1)^{n+1}} \right) = (-1)^n$$

a)-kohdan mukaan. Edellisten perusteella ja residylaskun mukaan

$$a_n = \mathrm{Res}_{z=0} g(z) + \mathrm{Res}_{z=1} g(z) = (-1)^{n+1} + (-1)^n = 0, \quad n \geq 0.$$

Kun taas $n < 0$, on $n + 1 \leq 0$, jolloin integrandilla on ainoastaan yksi napa $z = 0$ integrointitien sisällä. Samalla tavalla kuin yllä saadaan

$$a_n = \mathrm{Res}_{z=0} g(z) = (-1)^{n+1}, \quad n \leq -1.$$

Näin ollen Laurentin sarja on

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} (z-1)^n, \quad |z-1| > 1.$$

Tapa II (Geometrinen sarja): Koska ollaan alueessa $|z-1| > 1$, niin geometrisen sarjan summakaavaa voidaan soveltaa muuttujalle $w = (z-1)^{-1}$, sillä $|w| < 1$. Kehitetään f siis $(z-1)$:n negatiivisten potenssien muodostamaksi sarjaksi seuraavasti

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 - (-(z-1)^{-1})} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n}$$

vastaavilla perusteluilla kuin a)-kohdassa. Nakataan tässä vielä sarjan edessä oleva kerroin summan sisään ja tehdään pari summausindeksin vaihtoa, jolloin Laurentin sarjaksi saadaan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-(n+1)} \overset{n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (z-1)^{-k} \overset{k=-n}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} (z-1)^n,$$

eli sama lopputulos kuin ensimmäisellä tavalla. Viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty identiteettiä $(-1)^{-n-1} = (-1)^{-(n+1)} = (-1)^{n+1}$.

2. a) Koska kyseessä on rationaalifunktio, voidaan käyttää hyväksi faktaa, että erikoispisteet ovat *napoja.* Tässä tapauksessa f on supistetussa muodossa, joten navat ovat nimittäjän nollakohdat: $z^2 + z^3 = z^2(1+z) = 0$, eli $z = 0$ ja $z = -1$. Koska $z = 0$ on kaksinkertainen 0-kohta, on se *kaksinkertainen napa.* Vastaavasti napa $z = -1$ on *yksinkertainen.*

   b) Nyt kyseessä ei ole rationaalifunktio, mutta erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat. Määrätään nimittäjän nollakohdat eksponenttiesityksen avulla. Koska $1 = \mathrm{e}^{n2\pi \mathrm{i}}$, saadaan nimittäjän nollakohdiksi $z = n2\pi\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$.
   Erikoispisteiden laatu täytyy nyt perustella erikseen. Tarkastellaan ainoastaan tapausta $z = 0$, sillä muiden laatu voidaan perustella samalla tavalla. Käytetään hyväksi eksponenttifunktion Taylorin sarjaa. Käytännössä ei itse asiassa tarvitse laskea kuin 2 termiä. Koska eksponenttifunktio on kaikkialla analyyttinen, on Taylorin sarja voimassa koko kompleksitasossa. Edelleen, koska eksponenttifunktion derivaatta on se itse, on Taylorin sarja

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

   Tässä itse asiassa laskettiin ja perusteltiin kirjallisuudesta löytyvä tuttu kaava. Tämän perusteella nimittäjä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathrm{e}^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \cdots = z(1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} z + \dots) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1},$$

   josta nähdään, että $\mathrm{e}^z - 1 = zg(z)$, missä g on analyyttinen kaikkialla ja $g(0) = 1$. Tämän perusteella $1/g$ on analyyttinen origon ympäristössä, joten sillä on Taylorin sarja

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

   jolle $c_0 = 1/g(0) = 1$. Näin ollen funktiolla f on Laurentin sarja

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{1}{zg(z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}.$$

   Määritelmän mukaan $z = 0$ on *yksinkertainen napa.* Vastaavalla tavalla nähdään, että myös muut erikoispisteet $z_n = n2\pi\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$, ovat yksinkertaisia napoja (mikä voidaan perustella myös sillä, että f on $2\pi\mathrm{i}$-jaksollinen).

3. a) Määritelmän mukaan siirtofunktio $H(z)$ on impulssivasteen Z-muunnos, joten

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + \cdots = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1})^2.$$

b) Lasketaan vaste Z-muunnoksen avulla. Herätteen Z-muunnokseksi saadaan

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1,$$

geometrisen sarjan summakaavan nojalla. Siten vasteen Z-muunnos on

$$Y(z) = H(z)X(z) = (1 - z^{-1})^2 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 - z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n}.$$

Vaste on siis jono

$$(y(n))_{n=0}^{\infty} = (1, -1, 0, 0, \dots), \quad \text{jolle } y(n) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 2.$$

c) Amplitudivaste saadaan taajuusvasteen itseisarvona. Taajuusvaste $G(\omega)$ taasen saadaan siirtofunktiosta sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$, joten

$$\begin{aligned} G(\omega) &= H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = 1 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega} = (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/2})^2 \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}(2\mathrm{i}\sin(\omega/2))^2. \end{aligned}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty kaavakokoelmasta löytyvää kompleksisen sinin määritelmää. Tämän perusteella amplitudivaste on

$$|G(\omega)| = 4\sin^2(\omega/2) = 2(1 - \cos\omega).$$

Kun $\omega \approx 0$, on $|G(\omega)| \approx 0$, joten suodatin suodattaa pienet taajuudet pois.