# Tekniikan matematiikka

# Kompleksianalyysi (031077P)

## 1. välikoe 4.10.2021

1. a) Määrää itseisarvo ja argumentin pääarvo kompleksiluvulle

$$z = (1 + \mathrm{i})^{2021}.$$

   b) Ratkaise yhtälö

$$\cos z = 10\mathrm{i}.$$

   Anna ratkaisu(t) muodossa $z = x + \mathrm{i}y$.

2. Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = z^2 \cdot \overline{z}^2.$$

   a) Kirjoita $f$ muodossa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, missä $z = x + \mathrm{i}y$. (2p)

   b) Missä pisteissä funktiolla $f$ on derivaatta? Laske funktion derivaatta kyseisissä pisteissä, jos niitä löytyy. (4p)

3. Olkoon $C = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ kompleksiluvuista koostuva joukko ja

$$I(z_0) = \int_C \frac{z}{z - z_0} \mathrm{d}z, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

   kompleksinen käyräintegraali.

   a) Piirrä joukko $C$. (1p)

   b) Laske integraali $I(z_0)$, kun $z_0 = 2$. (3p)

   c) Laske integraali $I(z_0)$, kun $|z_0 - 2| > 2$. (2p)

# Koekaavat

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z - z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

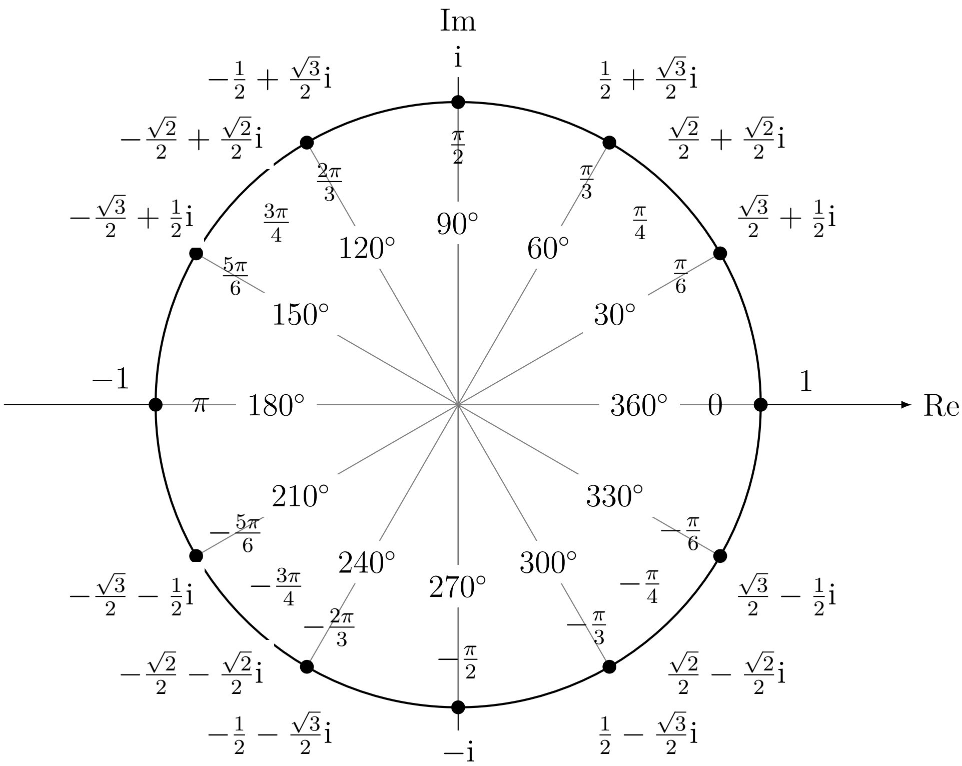
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

**Yksikköympyrä**



## Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Käytetään hyväksi eksponenttiesitystä. Kantaluvun itseisarvo on $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, joten $1+\mathrm{i}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right),$$

missä sulkujen sisällä oleva piste löytyy yksikköympyrältä. Niinpä $\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$, joten

$$z = (1+\mathrm{i})^{2021} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \sqrt{2}^{2021}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2021}{4}\pi} = 2^{1010}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

Edellisen perusteella $|z| = 2^{1010}\sqrt{2}$ ja $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$.

b) Käytetään kosinin määritelmää

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right),$$

jonka mukaan

$$\cos z = 10\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 20\mathrm{i} \,\Big|\Big| \cdot w := \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \Leftrightarrow w^2 - 20\mathrm{i}w + 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa

$$w = \frac{20\mathrm{i} \pm \sqrt{(20\mathrm{i})^2 - 4}}{2} = (10 \pm \sqrt{101})\mathrm{i}.$$

Koska $|w| = \sqrt{101} \pm 10$ ja $\mathrm{Arg}(w) = \pm\frac{\pi}{2}$, saadaan logaritmin määritelmän mukaan

$$\mathrm{i}z = \log w = \ln(\sqrt{101} \pm 10) + \mathrm{i}\left(\pm\frac{\pi}{2} + n2\pi\right),$$

joten yhtälön ratkaisut ovat

$$z = \frac{\pi}{2} + n2\pi - \ln(\sqrt{101}+10)\mathrm{i} \quad \text{tai} \quad z = -\frac{\pi}{2} + n2\pi - \ln(\sqrt{101}-10)\mathrm{i}.$$

2. a) Koska $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$, saadaan

$$f(z) = |z|^4 = (|z|^2)^2 = (x^2+y^2)^2 = \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{=u(x,y)} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{0}_{=v(x,y)}.$$

b) Luentojen mukaan $f$:llä on derivaatta niissä pisteissä $z_0 \in \mathbb{C}$, joissa Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa ja joissa osittaisderivaatat $u_x, u_y, v_x, v_y$ ovat olemassa pisteen $z_0$ ympäristössä ja ovat jatkuvia pisteessä $z_0$. Nyt $u$ ja $v$ ovat "siistejä" funktioita, joten osittaisderivaattojen olemassaolo ja jatkuvuus ei mikään "issue". Näin ollen riittää tutkia Cauchy-Riemannin yhtälöitä

$$u_x = 4x(x^2+y^2) = 0 = v_y \quad \text{ja} u_y = 4y(x^2+y^2) = 0 = -v_x,$$

jotka toteutuvat täsmälleen silloin, kun $x = y = 0$.
Luentojen perusteella $f$:llä on derivaatta ainoastaan origossa, jossa

$$f'(0) = u_x(0,0) + \mathrm{i}v_x(0,0) = 0.$$

3. a) Jätetään piirtäminen väliin. Piirtäminen onnistuu näppärästi vaikkapa WolframAlphan "parametric plot $(2+\cos\theta, \sin\theta)$"-komennolla. Joukko $C$ on ympyrä, jonka keskipiste on $z_0 = 2$ ja säde on 1.

b) Tehtävä voidaan laskea joko parametriesityksen avulla tai käyttämällä Cauchyn kaavaa. Edellisessä tavassa käytetään kompleksisen käyräintegraalin määritelmää

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z\theta)z'(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

johon sijoittamalla $z(\theta) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ja $z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ saadaan

$$I(2) = \int_C \frac{z}{z-2}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (2\mathrm{i} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 4\pi\mathrm{i}.$$

Jälkimmäisellä tavalla taasen merkitään $g(z) = z$, joka on analyyttinen kaikkialla. Niinpä Cauchyn kaavan mukaan

$$I(2) = \int_C \frac{g(z)}{z-2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot g(2) = 4\pi\mathrm{i}.$$

c) Ehto $|z_0 - 2| > 2$ tarkoittaa geometrisesti, että pisteen $z_0$ etäisyys ympyrän $C$ keskipisteestä on suurempaa kuin 2, joten $z_0$ on ympyrän $C$ ulkopuolella. Niinpä $f(z) = \frac{z}{z-2}$ on analyyttinen jokaisessa $C$:n ja sen "sisuksen" sisältävässä alueessa, johon $z_0$ ei kuulu, joten Cauchyn lauseen mukaan

$$I(z_0) = 0.$$