Kompleksianalyysi, syksy 2021

Harjoitus 6, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Kyseessä on rationaalifunktio, jonka ainoat erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat, joiksi saadaan

$$z^2 + z^4 = z^2(1 + z^2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{tai} \quad z = \pm \mathrm{i}.$$

Koska f on supistetussa muodossa, ovat erikoispisteet napoja. Yleisesti pätee:

supistetussa muodossa olevan rationaalifunktion erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat, jotka ovat nollakohdan kertaluvun napoja.

Koska $z = 0$ on kaksinkertainen nimittäjän nollakohta, on se *2. kertaluvun napa*. Vastaavasti $z = \mathrm{i}$ ja $z = -\mathrm{i}$ ovat samalla perusteella *ensimmäisen kertaluvun napoja* tai lyhyemmin *yksinkertaisia napoja.*

Todetaan harjoituksen vuoksi laskemalla, että edellä esitetty kriteeri on totta navan $z = 0$ tapauksessa. Sitä varten kirjoitetaan f muodossa

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2}, \quad \text{missä } g(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

on analyyttinen funktio pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä ja $g(0) = 1$. Nyt voimme jopa laskea g:lle origon ympäristössä *Taylorin sarjan*, sillä geometrisen sarjan summakaavan nojalla

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}.$$

Tämän mukaan f:llä on origon aidossa ympäristössä *Laurentin sarja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k-2} = \frac{1}{z^2} + \left(\underbrace{-1 + z^2 - z^4 + \ldots}_{\text{on analyyttinen}} \right).$$

Määritelmän mukaan **$\mathbf{z_0 = 0}$ on 2. kertaluvun napa**.

Residy voidaan määrätä joko suoraan Laurentin kehitelmän avulla tai käyttää residyn laskukaavaa

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right) \Big|_{z=z_0},$$

missä derivaatan arvo pisteessä z_0 tulkitaan tarvittaessa raja-arvona. Nyt $z_0 = 0$ ja $n = 2$, joten

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z^2 f(z) \right) \Big|_{z=0} = g'(0) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} \Big|_{z=0} = 0.$$

Tarkastellaan seuraavaksi pistettä $z_1 = \mathrm{i}$. Samalla tavalla kuin edellä voidaan todeta, että f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{g(z)}{z-\mathrm{i}}, \quad \text{missä } g(z) = \frac{1}{z^2(z+\mathrm{i})}$$

on analyyttinen pisteen $z_1 = \mathrm{i}$ ympäristössä. Sillä on siten olemassa Taylorin sarja

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\mathrm{i})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\mathrm{i})}{n!} (z-\mathrm{i})^n.$$

Meitä ei nyt oikeastaan kiinnostaa kertoimien a_n lukuarvot kerrointa a_0 lukuun ottamatta. Koska $a_0 = g(\mathrm{i}) = \frac{1}{\mathrm{i}^2(\mathrm{i}+\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \neq 0$, niin

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^{-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_n (z-\mathrm{i})^{n-1}}_{\text{on analyyttinen}}.$$

Siten **$\mathbf{z_1} = \mathrm{i}$ on ensimmäisen kertaluvun napa**. Samalla saatiin myös residyksi $\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) = \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää myös residyn laskukaavaa navalle, jonka mukaan

$$\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) (z-\mathrm{i}) f(z) \Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{1}{z^2(z+\mathrm{i})} \Big|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Samalla tavalla voidaan päätellä, että $z_2 = -\mathrm{i}$ **on ensimmäisen kertaluvun napa** ja että $\mathrm{Res}_{z=-\mathrm{i}} f(z) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

b) Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan nojalla nimittäjän nollakohdat ovat

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On kaksi vaihtoehtoa: 1) $b^2 - 4ac \neq 0$, jolloin löytyy kaksi erisuurta nollakohtaa, ja 2) $b^2 - 4ac = 0$, jolloin $z = -\frac{b}{2a}$ on kaksinkertainen nollakohta.
Kun $b^2 - 4ac \neq 0$, niin pisteet $z_\pm = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ovat ensimmäisen kertaluvun napoja. Käytetään residyn laskukaavaa navalle, jonka mukaan

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=z_+} f(z) = \mathrm{Res}_{z=z_+} \frac{1}{a(z-z_+)(z-z_-)} &= \lim_{z\to z_+} (z-z_+) f(z) \\ = \lim_{z\to z_+} \frac{1}{a(z-z_-)} = \frac{1}{a(z_+ - z_-)} &= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}.\end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan laskea, että $\mathrm{Res}_{z=z_-} f(z) = -1/\sqrt{b^2 - 4ac}$.
Kun $b^2 - 4ac = 0$, on f muotoa

$$f(z) = \frac{1}{a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2},$$

joka on samalla myös f:n Laurentin sarja pisteen $z_0 = -\frac{b}{2a}$ ympäristössä. Koska sarjakehitelmässä ei esiinny potenssia $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^{-1}$, on residy pisteessä $z = -b/2a$ nolla. Sama asia voidaan toki todeta myös laskukaavalla

$$\mathrm{Res}_{z=-\frac{b}{2a}} f(z) = \lim_{z\to-\frac{b}{2a}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 \frac{1}{a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2}\right) = \lim_{z\to-\frac{b}{2a}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1/a) = 0.$$

c) Tämä kohta on kinkkisempi kuin edelliset erikoispisteen $z = 0$ osalta. Piste $z = 1$ sen sijaan on ensimmäisen kertaluvun napa, sillä $\exp(1) \neq 0$, joten edellä esitetyn perusteella

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to1} \exp(1/z^2) = \mathrm{e}.$$

Sen sijaan Laurentin sarjan laskeminen pisteen $z = 0$ ympäristössä ei ole niin yksinkertaista kuin aikaisemmin. Eksponenttifunktiolle voitaisiin käyttää sarjakehitelmää

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \tag{1}$$

joka löytyy vaikkapa netistä

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Sijoittamalla sarjakehitelmään z:n paikalle $1/z^2$ saadaan sarja

$$\exp(1/z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-2n} = 1 + z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-4} + \frac{1}{6} z^{-6} + \dots, \tag{2}$$

mutta tämä pitäisi vielä kertoa $\frac{1}{z-1}$:lla.
Käytetään annettua vihjettä ja tarkastellaan funktion käyttäytymistä origon läheisyydessä. Jos $z_0 = 0$ olisi poistuva erikoispiste, pysyisi f rajoitettuna origon aidossa ympäristössä. Jos nyt kuitenkin annetaan z:n lähestyä nollaa reaaliakselia pitkin, jota varten merkitään $z = t$, niin saadaan

$$f(t) = \frac{1}{t-1} \exp(1/t^2) \to -\infty, \quad \text{kun} \quad t \to 0.$$

Niinpä $z_0 = 0$ ei voi olla poistuva erikoispiste.
Jää jäljelle kaksi mahdollisuutta. Jos $z_0 = 0$ olisi kertaluvun n napa, niin f voitaisiin kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{c}{z^n} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} c_k z^k$$

joillekin vakioille $c \neq 0$ ja $c_k \in \mathbb{C}$. Kun $z \to 0$, niin f menisi äärettömyyteen lähestytäänpä nollaa mistä suunnasta tahansa. Jos nyt lähestytään origoa imaginaariakselia pitkin, eli kun $z = \mathrm{i}t$, niin

$$f(\mathrm{i}t) = \frac{1}{\mathrm{i}t - 1} \exp(-1/t^2) \to 0, \quad \text{kun} \quad t \to 0.$$

Edellä todetun perusteella $\mathbf{z_0 = 0}$ **on oleellinen erikoispiste**.
Residyn laskemiseen oleellisessa erikoispisteessä ei oikein ole muuta laskentatapaa kuin Laurentin sarjan käyttö. Kehitettämällä $\frac{1}{z-1}$ geometrisen sarjan summakaavalla ja käyttämällä sarjaesitystä (2) saadaan

$$f(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-2n} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{m-2n}.$$

Ainoastaan z^{-1}:llä on residyn kannalta merkitystä, niin valitsemalla $m = n - 1$ kutakin $n \geq 1$ kohti saadaan residyksi

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 - \mathrm{e}$$

eksponenttifunktion sarjakehitelmän (1) nojalla.

2. a) Nimittäjässä olevan toisen asteen polynomin $P(z) = z^2 + 2z + k^2$ diskriminantti on $D = 4 - 4k^2$, joten meillä on kaksi tapausta

(i) $|k| \leq 1$, jolloin polynomin molemmat nollakohdat ovat reaalisia. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan polynomin nollakohdiksi

$$z_+ = -1 + \sqrt{1 - k^2} \quad \text{ja} \quad z_- = -1 - \sqrt{1 - k^2}.$$

Koska

$$-1 - \underbrace{\sqrt{1 - k^2}}_{\geq 0} \leq -1 \quad \text{ja} \quad -1 \leq -1 + \underbrace{\sqrt{1 - k^2}}_{\leq 1} \leq -1 + 1 = 0,$$

on z_- aina joko yksikköympyrän kehällä tai yksikköympyrän ulkopuolella. Edelleen, jos $|k| = 1$, on $z_\pm = -1$ yksikköympyrän kehällä, ja jos $|k| < 1$, on z_+ yksikköympyrän sisällä.

(ii) $|k| > 1$, jolloin polynomin molemmat nollakohdat ovat kompleksilukuja. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan polynomin nollakohdiksi

$$z_+ = -1 + \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1} \quad \text{ja} \quad z_- = -1 - \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1},$$

jotka molemmat ovat yksikköympyrän ulkopuolella, sillä $\mathrm{Re}(z_\pm) = -1$ ja $\mathrm{Im}(z_\pm) \neq 0$.

Merkitään yksikkökiekkoa symbolilla $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Yksikköympyrän sisäpuolella olevien napojen lukumäärä on

$$\#\{z \in \mathbb{D} : z = z_\pm\} = \begin{cases} 1, & \text{kun } |k| < 1, \\ 0, & \text{kun } |k| \geq 1. \end{cases}$$

b) Edellisen kohdan perusteella polynomilla $P(z)$ on kaksi nollakohtaa, kun $|k| \neq 1$, ja yksi nollakohta $z_\pm = -1$, kun $|k| = 1$. Näin ollen navat ovat yksinkertaisia, kun $|k| \neq 1$, ja napa $z_\pm = -1$ on kaksinkertainen.

Jaetaan nimittäjän polynomi tekijöihin $P(z) = (z - z_+)(z - z_-)$. Yksinkertaisille navoille z_0 residy voidaan laskea kaavalla

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{P(z)}.$$

Otetaan esimerkkinä $z_+ = -1 + \sqrt{1 - k^2}$ tapauksessa $|k| < 1$. Ylläolevan kaavan mukaan

$$\mathrm{Res}_{z=z_+} f(z) = \lim_{z \to z_+} = \frac{z - z_+}{(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2}}.$$

Muut tapaukset voidaan laskea vastaavasti.

Kaksinkertaiselle navalle $z_\pm = -1$ residyksi saadaan

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{(z+1)^2}{(z+1)^2} \right) = 0,$$

sillä vakiofunktion 1 derivaatta on nolla.

Kootaan edellä todettu yhteen

$$\operatorname{Res}_{z=z_\pm} f(z) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}, & \text{kun } |k| < 1, \\ 0, & \text{kun } |k| = 1, \\ \mp\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}\mathrm{i}, & \text{kun } |k| > 1. \end{cases}$$

3. Merkitään $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Teorian mukaan tämän tyyppinen epäoleellinen integraali voidaan laskea residyjen avulla kaavalla $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$, missä pisteet z_k ovat eristettyjä erikoispisteitä. Tässä tapauksessa erikoispisteet ovat $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$:n navat:

$$g(z) = z^4 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})},\; k = 0, 1, 2, 3.$$

Nimittäjällä ja osoittajalla ei selvästi ole yhteisiä nollakohtia, joten nimittäjän nollakohdat ovat funktion $f(z)$ 1. kl:n napoja. Määrätään residyt navoissa, jotka sijaitsevat ylemmässä puolitasossa. Kun $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ ja $g'(z) = 4z^3$:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z_0+1}{4z_0^3} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+1}{4e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} \\ &= \frac{1}{4}(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(-\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i})) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1 + (\sqrt{2}+1)\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Kun $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $\mathrm{Im}(z_1) > 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) &= \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{z_1+1}{4z_1^3} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}+1}{4e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}}} \\ &= \frac{1}{4}(e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 + (\sqrt{2}-1)\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Koska muut navat sijaitsevat alemmassa puolitasossa, niitä ei tarvitse huomioida. Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) &= 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+(\sqrt{2}+1)\mathrm{i}) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+(\sqrt{2}-1)\mathrm{i})\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Lasketaan integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{f^4+10f^2+9}\mathrm{d}f$ residyjen avulla. Tässä tapauksessa erikoispisteet ovat $|H(z)|^2 = \frac{h(z)}{g(z)}$:n navat:

$$\begin{aligned} g(z) &= z^4 + 10z^2 + 9 = 0,\; \text{merk. } w = z^2 \\ &\Leftrightarrow w^2 + 10w + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow w = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 9}}{2} = -5 \pm 4 \text{ jolloin} \\ z &= \pm\sqrt{-5\pm 4} = \begin{cases} \pm 3\mathrm{i} \\ \pm\mathrm{i}. \end{cases} \end{aligned}$$

Määrätään residyt navoissa, jotka sijaitsevat ylemmässä puolitasossa. Nämä navat ovat $z_0 = \mathrm{i}$ ja $z_1 = 3\mathrm{i}$. Nyt $g'(z) = 4z^3 + 20z$, joten residy pisteessä $z_0 = \mathrm{i}$ on

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} |H(z)|^2 = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{9}{4z_0^3 + 20z_0} = \frac{9}{-4\mathrm{i} + 20\mathrm{i}} = -\frac{9}{16}\mathrm{i}$$

ja pisteessä $z_1 = 3\mathrm{i}$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} |H(z)|^2 = \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{9}{4z_1^3 + 20z_1} = \frac{9}{-108\mathrm{i} + 60\mathrm{i}} = \frac{3}{16}\mathrm{i}$$

Koska muut navat sijaitsevat alemmassa puolitasossa, niitä ei tarvitse huomioida. Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{9}{16}\mathrm{i} + \frac{3}{16}\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Koska $2|H(0)|^2 = 2$, niin

$$W_{eq} = \frac{3\pi}{8}.$$

5. Sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alkuperäinen reaalinen integraali muuntuu yksikköympyrän C yli otetuksi kompleksiseksi käyräintegraaliksi. Kirjoitetaan

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - z^{-1}\right) = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$$

vihjeen mukaisesti. Lisäksi $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$, eli $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$. Annettu integraali voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(2 + \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)} = \int_C \frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{i}z(z^2+4\mathrm{i}z-1)}\mathrm{d}z = \int_C \frac{2}{z^2+4\mathrm{i}z-1}\mathrm{d}z.$$

Lasketaan nimittäjän nollakohdat:

$$z^2 + 4\mathrm{i}z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4\mathrm{i} \pm \sqrt{(4\mathrm{i})^2+4}}{2} = -2\mathrm{i} \pm \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Löydettiin siis kaksi yksinkertaista napaa, joista ainoastaan $(\sqrt{3}-2)\mathrm{i}$ on yksikköympyrän sisällä. Residylauseen mukaan

$$\int_C \underbrace{\frac{2}{z^2+4\mathrm{i}z-1}}_{\overset{\text{merk.}}{=} f(z)} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}_{z=(\sqrt{3}-2)\mathrm{i}} f(z) = 2\pi\mathrm{i}\frac{2}{2z+4\mathrm{i}}\Big|_{z=(\sqrt{3}-2)\mathrm{i}} = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

”kätevän laskukaavan” nojalla.

6. Määritelmän mukaan Fourier-muunnnos on

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} e^{-\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x.$$

Lasketaan muunnos residylaskun avulla. Sitä varten pitää laskea funktion f navat. Nyt nimittäjän tekijöiden jako on helppo ja saadaan

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}.$$

Käytetään luentokalvojen viikon 6 Lausetta 5, jonka mukaan riittää tarkastella ainoastaan ylemmässä puolitasossa olevia napoja. Koska $z = \mathrm{i}$ on ainoa ylemmän puolitason napa ja sen kertaluku on kaksi, niin

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} f(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-\mathrm{i})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}f(z)\right)\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^2}\right)\Big|_{z=\mathrm{i}} \\ &= \left(-\mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^2} - 2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^3}\right)\Big|_{z=\mathrm{i}}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a\mathrm{i}}{4} + \frac{1}{4\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^a = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} + a\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^a.$$

Residylauseen mukaan

$$F(a) = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} f(z) = \frac{\pi}{2}(-a+1)\,\mathrm{e}^a = \frac{\pi}{2}(|a|+1)\,\mathrm{e}^{-|a|}, \quad \text{kun } a < 0.$$

Koska f on parillinen ja reaalinen, myös sen Fourier-muunnos on parillinen ja reaalinen, joten

$$F(a) = \frac{\pi}{2}(|a|+1)\,\mathrm{e}^{-|a|}, \text{ kun } a > 0.$$

Edellisten perusteella

$$F(a) = \frac{\pi}{2}(|a|+1)\,\mathrm{e}^{-|a|}$$

kaikilla $a \in \mathbb{R}$.