Kompleksianalyysi, syksy 2021

Harjoitus 5, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. Nyt $\lim_{n\to 0} \operatorname{Re} z_n = 2$ ja $\lim_{n\to 0} |\operatorname{Im} z_n| = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2} = 0$, joten $\lim_{n\to 0} \operatorname{Im} z_n = 0$ ja edelleen $\lim_{n\to 0} z_n = 2$.

   Luvun z_n argumentin pääarvo $\operatorname{Arg} z_n = \begin{cases} -\arctan(\frac{1}{2n^2}), & n = 1, 3, 5, \ldots \\ \arctan(\frac{1}{2n^2}), & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$.

   Nyt $\lim_{n\to 0} \operatorname{Arg} z_n = -\arctan(0) = 0$, kun n on pariton ja $\lim_{n\to 0} \operatorname{Arg} z_n = \arctan(0) = 0$, kun n on parillinen, joten jokaiselle ϵ voidaan löytää sellainen n, että $|\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z_n| < \epsilon$. (Parittomien n:n arvojen mukainen jono lähestyy 0:aa negatiiviselta puolelta ja parillisten positiiviselta puolelta). Luentoesimerkissä raja-arvoa ei ollut, koska lähestyttävä piste oli eri parillisille ja parittomille n:n arvoille.

2. a) Sijoittamalla $z = e^{i\delta}$ geometrisen summan kaavaan

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

saadaan

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \delta)} + e^{i(\omega t + 2\delta)} + e^{i(\omega t + 3\delta)} &= e^{i\omega t} \frac{1 - e^{i4\delta}}{1 - e^{i\delta}} = e^{i\omega t} \frac{e^{i2\delta}}{e^{i\delta/2}} \frac{e^{i2\delta} - e^{-i2\delta}}{e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}} \\ &= e^{i\omega t} \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)}, \end{aligned}$$

joten

$$f(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)} e^{i(\omega t + 3\delta/2)}\right) = \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)} \cos(\omega t + 3\delta/2).$$

Merkitään

$$R(\delta) = \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)}, \tag{1}$$

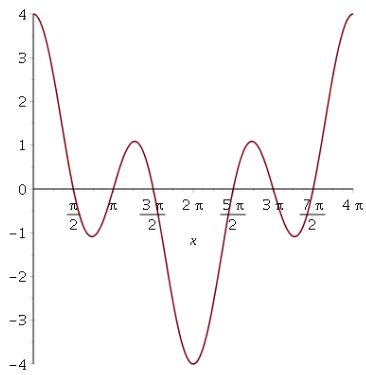
jolloin amplitudi on

$$A(\delta) = |R(\delta)| \tag{2}$$

Amplitudin maksimiarvo voidaan katsoa vaikkapa funktion $R(\delta)$ kuvaajasta, josta nähdään, että maksimi on 4 ja se saavutetaan, kun viive on $\delta = 0$. Tässä arvo nollassa voidaan laskea raja-arvona $\delta \to 0$. Toinen tapa on erottaa tapaukset $\delta = 0$ ja $\delta \neq 0$. Kun $\delta = 0$, niin

$$f(t) = \operatorname{Re} 4e^{i\omega t} = 4\cos(\omega t).$$

Tapaus $\delta \neq 0$ on käsitelty edellä.



Kuva 1: Funktion $R(\delta)$ kuvaaja yhden jakson yli, josta nähdään, että amplitudin maksimi on 4.

Ääriarvo voidaan laskea myös normaalilla ääriarvotarkastelulla. Käyttämällä kaksinkertaisen kulman kaavoja saadaan

$$
\begin{aligned}
R(\delta) &= \frac{2\sin(\delta)\cos(\delta)}{\sin(\delta/2)} = \frac{4\sin(\delta/2)\cos(\delta/2)(2\cos^2(\delta/2)-1)}{\sin(\delta/2)} \\
&= 4\cos(\delta/2)(2\cos^2(\delta/2)-1), \quad \delta \neq k\pi.
\end{aligned}
$$

Jos yllä merkitään $y = \cos(\delta/2)$ ja tarkastellaan ääriarvoja välillä $[0,1]$, nähdään, että maksimiarvo on 4 ja se saavutetaan, kun $y = \cos(\delta/2) = 1$, eli kun $\delta = 0$.
Kuvasta 1 näkyy, että funktio $R(\delta)$ saa myös negatiivisia arvoja. Koska amplitudi on funktion $R(\delta)$ itseisarvo, nähdään, että vaihekulma ϕ riippuu funktion $R(\delta)$ merkistä. Kun $R(\delta) < 0$, niin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(t) = R(\delta)\cos(\omega t + 3\delta/2) = -|A(\delta)|\cos(\omega t + 3\delta/2) = |A(\delta)|\cos(\omega t + 3\delta/2 + \pi),$$

sillä $-\cos(x) = \cos(x+\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämän perusteella $f(t)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(t) = A(\delta)\cos(\omega t + \phi),$$

missä

$$\phi = \phi(\delta) = \begin{cases} \frac{3\delta}{2}, & \text{kun } R(\delta) \geq 0, \\ \frac{3\delta}{2} + \pi, & \text{kun } R(\delta) < 0, \end{cases}$$

sekä R ja A on määritelty kaavoilla (1) ja (2).

b) Olkoon nyt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega t + \delta_k)$$

edellyttäen, että sarja suppenee. Jos $|A_k| \leq Ck^{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$, niin sarja suppenee itseisesti, sillä

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big|A_k \cos(\omega t + \delta_k)\big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} < \infty.$$

Jos taas $\alpha \leq 1$, niin yleisesti sarja ei suppene itseisesti. Esimerkiksi, kun $\delta_k = k2\pi$ ja $A_k = k^{-\alpha}$, niin

$$f(t) = \cos(\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} = \infty, \quad \alpha \leq 1.$$

3. a) Tämän voi laskea kahdella eri tavalla.
Tapa 1: Geometrisen sarjan summakaavan

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k, \quad |w| < 1,$$

avulla saadaan

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i} + z} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{1}{1-(\mathrm{i}z)} = \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{i}z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{k-1} z^k, \quad |\mathrm{i}z| = |z| = |z-0| < 1.$$

Tästä nähdään, että suppenemissäde on 1.
Tapa 2: Koska f on analyyttinen origossa saadaan

$$f'(z) = \frac{-1}{(\mathrm{i}+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(\mathrm{i}+z)^3} = \frac{2(-1)^2}{(\mathrm{i}+z)^3}, \ldots, f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(\mathrm{i}+z)^{n+1}}$$

ja edelleen sijoittamalla $z = 0$ saadaan Taylorin sarjaksi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{\mathrm{i}^{k+1} k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k-k-1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{k-1} z^k,$$

sillä $\mathrm{i}^2 = -1$. Saatiin siis sama tulos kuin ensimmäisellä tavalla kuten pitääkin. Suppenemissäde on selvästi 1, sillä z^k:n kertoimen itseisarvo on aina vakio 1 kaikilla k. Siten suppenemiskiekko on yksikkökiekko $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

b) Kaivetaan alkeisfunktio sarjakehitelmästä käyttämällä geometrisen sarjan summakaavaa seuraavasti

$$\begin{aligned} f(z) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{k+1}(z-\mathrm{i})^k = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{2}\right)^k \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{2}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{2}{1-\mathrm{i}z} = \frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}(\mathrm{i}+z)} = \frac{1}{\mathrm{i}+z}. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis sama funktio kuin a)-kohdassa, vaikkei ensisilmäyksellä siltä ehken näytäkään. Suppenemissäde R voidaan laskea osamäärätestillä. Sitä varten merkitään $a_n = -\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{k+1}$, jolloin

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}}{-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{\mathrm{i}}\right| = 2.$$

Sama asia voidaan perustella myös geometrisesti lopputuloksesta, sillä sarjakehitelmän keskipisteen i etäisyys lähimmästä ja ainoasta ”pahasta pisteestä” $-\mathrm{i}$, joka on nimittäjän nollakohta, on 2.
Siten suppenemiskiekko on $\mathbb{D}(\mathrm{i},2) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-\mathrm{i}| < 2\}$.

4. a) Käytetään geometrisen sarjan summakaavaa ja kirjoitetaan $H(z)$ muodossa

$$H(z) = \frac{1}{z(1+z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

Tehdään indeksinvaihto $n-1=-k$, jolloin siirtofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{1}(-1)^{k-1}z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n},$$

josta voidaan lukea impulssivaste

$$h(n) = \begin{cases}(-1)^{n-1}, & \text{kun } n = -\infty,\dots,-2,-1,0,1,\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

b) Kun $|z| > 1$, on $|z^{-1}| < 1$. Kehitetään nyt $H(z)$ z:n negatiivisten potenssien mukaan eteneväksi sarjaksi seuraavasti

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(-z^{-1})} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-1})^k = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-(k+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}, \end{aligned}$$

josta voidaan lukea impulssivaste

$$h(n) = \begin{cases}(-1)^{n+2}, & \text{kun } n = 2,3,4,\dots,\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

5. a) Tässä nimittäjä on jo jaettu tekijöihin, joten selviämme siitä vaivasta. Supistetussa muosossa olevana rationaalifunktiona f on analyyttinen kaikkialla muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa $z=0$ ja $z=4$. Laurentin sarjaa varten kirjoitetaan f muodossa

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^3}\frac{z+1}{z},$$

sillä $(z-4)^3$ on jo valmiiksi hyvä termi sarjakehitelmää ajatellen. Nyt meillä vain täytyy löytää sarjaesitys jälkimmäiselle osamäärälle pisteen $z_0 = 4$ ympäristössä. Koska $z \mapsto \frac{z+1}{z}$ on analyyttinen pisteen $z_0 = 4$ ympäristössä, on sillä olemassa Taylorin sarja. Lasketaan Taylorin sarja geometrisen sarjan summakaavan avulla kehittämällä funktio $(z-4)$:n potensseiksi. Saadaan

$$\frac{z+1}{z} = \frac{z+1}{4+(z-4)} = \frac{z+1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-4}{4}\right)} = \frac{z+1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-4}{4}\right)^k$$

$$= \frac{z+1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} (z-4)^k.$$

Summalauseke itsessään on oikeaa muotoa. Ainoastaan sen edessä oleva funktio aiheuttaa harmia. Se taas voidaan hoidella, kun järjestellään osoittajaan termi $(z-4)$ kirjoittamalla

$$\frac{z+1}{4} = \frac{(z-4)+5}{4} = \frac{z-4}{4} + \frac{5}{4}.$$

Edelliseen perusteella

$$\frac{z+1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} (z-4)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5(-1)^k}{4^{k+1}} (z-4)^k.$$

Erottamalla jälkimmäisestä ensimmäinen termi $\frac{5}{4}$ ja tekemällä ensimmäisessä summausindeksin vaihto $k+1=l$ saadaan

$$\frac{z+1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k} (z-4)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5(-1)^k}{4^{k+1}} (z-4)^k = \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} (z-4)^k,$$

sillä

$$\frac{(-1)^{k-1}}{4^k} = \frac{-4(-1)^k}{4^{k+1}} \Rightarrow \frac{(-1)^{k-1}}{4^k} + \frac{5(-1)^k}{4^{k+1}} = \frac{(-1)^k(5-4)}{4^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{4^{k+1}}.$$

Laurentin sarja on siis

$$f(z) = \frac{5}{4} \frac{1}{(z-4)^3} + \frac{1}{(z-4)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} (z-4)^k = \frac{5}{4} \frac{1}{(z-4)^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} (z-4)^{k-3},$$

joka on muotoa

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-4)^k, \quad 0 < |z-4| < R,$$

missä

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+4}}, & \text{kun } k \geq -2, \\ \frac{5}{4}, & \text{kun } k = -3, \\ 0, & \text{kun } k < -3. \end{cases}$$

Suppenemisalueen yläraja R voidaan määrätä laskennallisesti kuten esimerkiksi tehtävässä 3 b). Päätellään tässä sama kuitenkin geometrisesti. Koska nimittäjän nollakohdat ovat $z=0$ ja $z=4$, niin yläraja R on lähimmän "pahan pisteen" $z=0$ etäisyys Laurentin sarjan keskipisteestä $z=4$, eli $R=4$.

b) Koska sini on analyyttinen kaikkialla, on f analyyttinen kaikkialla muualla paitsi nimittäjän nollakohdassa $z=0$. Laurentin sarjan määräämiseksi käytetään hyväksi annettua sinin sarjakehitelmää, jonka mukaan

$$\sin(2z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2z)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Funktion f Laurentin sarja saadaan, kun edellinen jaetaan puolittain z^3:lla:

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1-3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2(k-1)} = \frac{2}{1!} z^{-2} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} z^2 + \ldots, \quad |z| > 0.$$