Kompleksianalyysi, syksy 2021

Harjoitus 4, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. Parametrisoidaan parametrin kaari asettamalla $z(t) = t + \mathrm{i}t^2$ kaikilla $0 \leq t \leq 1$. Parametriesityksen avulla integraali $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ voidaan esittää muodossa $\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$.

   a) Nyt $C: \ z(t) = t + \mathrm{i}t^2$, joten $z'(t) = 1 + 2t\mathrm{i}$, $0 \leq t \leq 1$ ja $f(z(t)) = f(t + \mathrm{i}t^2) = (t + \mathrm{i}t^2)^2 = t^2 - t^4 + 2t^3\mathrm{i}$. Integraaliksi saadaan

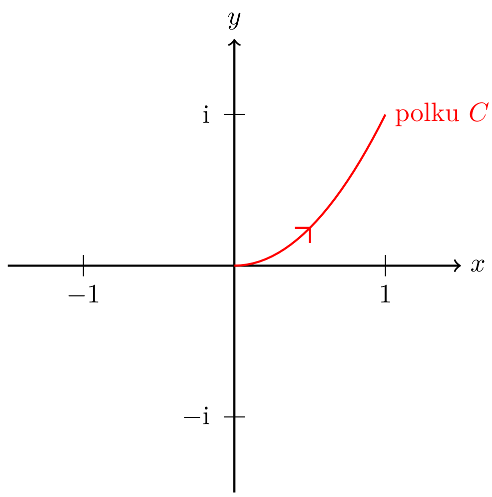
$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2t^3\mathrm{i})(1 + 2t\mathrm{i})\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^2 - 5t^4)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 (4t^3 - 2t^5)\mathrm{d}t \\ &= \Big/_0^1 \frac{1}{3}t^3 - t^5 + \mathrm{i}\Big/_0^1 t^4 - \frac{1}{3}t^6 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

   Vähemmällä työllä olisi päästy, jos olisi käytetty hyväksi f:n analyyttisyyttä. Nimittäin, koska $f(z) = z^2$ on analyyttinen, on sillä integraalifunktio $F(z) = \frac{1}{3}z^3$. Integraalifunktion avulla integraaliksi saadaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(1+\mathrm{i}) - F(0) = \frac{1}{3}(1+\mathrm{i})^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

   b) Nyt analyyttisyyttä ei voida hyödyntää, joten ei ole muuta mahdollisuutta kuin laskea integraali parametriesityksen avulla. Tässä tapauksessa $f(z(t)) = |z(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = t^2 + t^4$ ja $z'(t)$ on kuten a)-kohdassa, joten

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 (t^2 + t^4)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 (2t^3 + 2t^5)\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \mathrm{i}\Big/_0^1 \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^6 \\ &= \frac{8}{15} + \frac{5}{6}\mathrm{i}.\end{aligned}$$



Kuva 1: Tehtävän 1 polku

2. Samalla tavalla kuin tehtävässä 1 voidaan todeta, että parametriesityksen avulla integraali $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ voidaan esittää muodossa $\int_a^b f(z(\theta))z'(\theta)\mathrm{d}\theta$. Ympyrän C eräs parametriesitys on $z(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

a) Tässä kohdassa $f(z(\theta)) = \left(\overline{z(\theta) - 1}\right)^2 = (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1)^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}$ ja $z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, joten

$$\begin{aligned}\int_C (\overline{z-1})^2 \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \Big/_{0}^{2\pi} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 0,\end{aligned}$$

sillä e^z on $2\pi\mathrm{i}$-jaksollinen.

b) Nyt $f(z(\theta)) = (z(\theta) - 1)^2 = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1)^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}$ ja $z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, joten

$$\begin{aligned}\int_C (z-1)^2 \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \Big/_{0}^{2\pi} \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} = 0.\end{aligned}$$

Molemmissa tapauksissa saatiin sama lopputulos, vaikka integroitavat funktiot ovat hyvin erilaiset, vaikkakin näennäisesti ovat lähes samanlaiset. Kohdan a) funktio ei itse asiassa ole analyyttinen missään, sillä $g(z) = \overline{z}$ ei ole analyyttinen missään. Sen sijaan b)-kohdan funktio on analyyttinen kaikkialla. Ensimmäisessä kohdassa emme voi yhden käyräintegraalin perusteella vetää johtopäätöstä integraalifunktion olemassaolosta. Jos olisimme valinneet käyräksi yksikköympyrän $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, niin olisimme saaneet nollasta poikkeavan lopputuloksen, mikä olisi poissulkenut integraalifunktion olemassaolon luentoviikon 4 Seurauksen 1 mukaan.

Toisaalta b)-kohdassa selvästikin $F(z) = \frac{1}{3}(z-1)^3$ on funktion $f(z) = (z-1)^2$ integraalifunktio, joten

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(z(2\pi)) - F(z(0)) = 0,$$

sillä käyrä on sulkeutuva.

3. Tässä tapauksessa $C: \ z(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}, \ z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \ 0 \le \theta \le \pi$ ja

$$\begin{aligned}\int_C z^i \mathrm{d}z &= \int_C e^{\mathrm{i}\mathrm{Log}(z)}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} e^{\mathrm{i}\mathrm{Log}(e^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\theta}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\theta(\mathrm{i}-1)}\mathrm{d}\theta \\ &= \Big/_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}e^{\theta(\mathrm{i}-1)} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}\left(e^{\pi(\mathrm{i}-1)} - 1\right) = \frac{1}{1-\mathrm{i}}\left(e^{-\pi} + 1\right).\end{aligned}$$

4. Cauchyn lauseen mukaan $\int_C g(z)\mathrm{d}z = 0$, jos $g(z)$ on analyyttinen sulkeutuvalla käyrällä C ja sen sisäpuolella. Toisaalta Cauchyn kaavan mukaan $g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, kun z_0 on C:n sisällä. Pyritään saattamaan integroitava funktio jompaan kumpaan yllä olevista muodoista. Sitä varten täytyy selvittää funktion f navat.

a) Koska f on supistetussa muodossa oleva rationaalifunktio, on se analyyttinen kaikkialla muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Nimittäjän nollakohdiksi saadaan

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm\mathrm{i}.$$

Koska f on analyyttinen C:n ja sisuksen sisältävässä alueessa, kunhan vain nimittäjän nollakohdat on jätetty alueen ulkopuolelle, niin Cauchyn lauseen mukaan integraali häviää.

Tässä voidaan käyttää myös integraalifunktiota, mutta tämä tapa ei ole yleisesti suositeltava, sillä tämä on herkkä väärinymmärrykselle. Nimittäin,

$$F(z) = \frac{1}{2}\log(z^2+1)$$

on f:n integraalifunktio, kun logaritmin haara valitaan sopivasti. Huomaa, ettemme esimerkiksi voi valita päähaaraa, sillä C kulkee negatiivisen reaaliakselin, joka on päähaaralla leikattu pois, poikki. Sen sijaan voimme leikata kompleksitason auki vaikkapa imaginaariakselin suuntaisella puolisuoralla, joka kulkee pisteestä i äärettömyyteen $\mathrm{i}\infty$. Koska nyt C on sulkeutuva käyrä haaralla, jossa integraalifunktio on olemassa, häviää integraali.

b) Tässä tapauksessa nimittäjän ainoa nollakohta on $z = 1$, jolloin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Tämä muoto antaisi vihiä, että Cauchyn kaava voisi olla hyödyllinen. Nyt siis f:llä on erikoispiste integrointialueen sisällä.
Jaetaan polku kahteen osaan $C = C_1 \cup C_2$, missä C_1 on lemniskaatan oikean puolen silmukka ja C_2 vasemman puolen silmukka. Piste $z_1 = \mathrm{i}$ on ainoa C_1:n sisällä oleva erikoispiste. Sovelletaan nyt Cauchyn kaavaa valitsemalla siinä $n = 1$. Sitä varten kirjoitetaan f muodossa

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2}, \quad \text{missä} \quad g(z) = z.$$

Koska $g(z)$ on analyyttinen C_1:ssä ja sen sisäpuolella, niin Cauchyn kaavan mukaan

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_C \frac{g(z)}{(z-1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot g'(1) = 2\pi\mathrm{i}\cdot 1 = 2\pi\mathrm{i}.$$

Integraalille C_2 sen sijaan voidaan käyttää Cauchyn lausetta, sillä ainoa erikoispiste $z = 1$ on C_2:n ulkopuolella. Siten

$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Yllä siirryttiin C_2:n vastapolkuun $-C_2$, sillä C_2:n kiertosuunta on myötäpäivään.
Laskemalla edellä saadut integraalit yhteen saadaan integraaliksi

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} + 0 = 2\pi\mathrm{i}.$$

5. Lasketaan ensin integroitavan funktion navat:

$$\begin{aligned} &z^2 + 2\mathrm{i}z + 3 = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow z = \frac{-2\mathrm{i} \pm \sqrt{-4 - 4\cdot 3}}{2} \\ &\quad z = -\mathrm{i} \pm 2\mathrm{i} = \begin{cases} -3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}. \end{cases} \end{aligned}$$

Muodostetaan tämän jälkeen OMK:

$$\begin{aligned} \frac{4z}{z^2+2\mathrm{i}z+3} &= \frac{A}{z+3\mathrm{i}} + \frac{B}{z-\mathrm{i}} = \frac{(A+B)z - \mathrm{i}A + 3\mathrm{i}B}{z^2+2\mathrm{i}z+3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A+B &= 4 \\ 3B - A &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 3 \\ B &= 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Integraali voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} I = \int_{|z|=2} \frac{4z\sin(z)}{z^2+2\mathrm{i}z+3}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=2} \frac{3\sin(z)}{z+3\mathrm{i}} + \frac{\sin(z)}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|=2} \frac{3\sin(z)}{z+3\mathrm{i}}\mathrm{d}z + \int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Ensimmäisen integraalin arvo on 0, sillä sen integrandin napa on integroimistien rajoittaman alueen ulkopuolella ja $3\sin(z)$ on analyyttinen ko. alueessa. Cauchyn kaavan mukaan jälkimmäisestä termistä saadaan ($f(z) = \sin(z)$ ja $z_0 = \mathrm{i}$):

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z - \mathrm{i}} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - e^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}\right) \\
&= \pi \left(e^{-1} - e\right).
\end{aligned}
$$

6. Kun z_0 on integroimistien C rajoittaman alueen sisäpuolella, integraalin arvo voidaan määrittää käyttämällä Cauchyn kaavaa derivaatalle: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$. Kun merkitään $\int_C \frac{e^{2z}}{z^3} \mathrm{d}z = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$, huomataan, että tässä tapauksessa $f(z) = e^{2z},\ z_0 = 0,\ n = 2$ ja $f^{(2)}(z) = 4e^{2z}$. z_0 on sulkeutuvan integroimistien sisällä, joten integraalista saadaan

$$
\int_C \frac{e^{2z}}{z^3} \mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!} \cdot 4e^{2\cdot 0} = 4\pi\mathrm{i}.
$$