Kompleksianalyysi, syksy 2021

Harjoitus 3, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Käytetään yhdistetyn funktion $(g \circ h)(z) = g(h(z))$ derivoimissääntöä

$$(g \circ h)'(z) = g'(h(z))h'(z)$$

funktioille $h(z) = 1 - 4z^2$ ja $g(z) = z^3$. Derivaataksi saadaan

$$f'(z) = -24z(1 - 4z^2)^2.$$

b) Tämä voidaan laskea kahdella tavalla. Ehkäpä luonnollisin tapa on käyttää derivaatan määritelmää

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Jos yllä erityisesti valitaan $h \in \mathbb{R}$ ja merkitään $f = u + iv$, niin saadaan

$$f'(z) = u_x(x, y) + \mathrm{i}v_x(x, y),$$

missä u_x ja v_x tarkoittavat funktioiden u ja v osittaisderivaattoja reaalimuuttujan x suhteen. Koska nyt

$$u(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\left(x \sin y - y \cos y\right)$$

ja

$$v(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\left(y \sin y + x \cos y\right),$$

niin tulon derivointikaavalla saadaan

$$u_x(x, y) = -\mathrm{e}^{-x}x \sin y + \mathrm{e}^{-x} \sin y + \mathrm{e}^{-x}y \cos y$$

ja

$$v_x(x, y) = -\mathrm{e}^{-x}y \sin y - \mathrm{e}^{-x}x \cos y + \mathrm{e}^{-x} \cos y.$$

Siten

$$f'(z) = -\mathrm{e}^{-x}x \sin y + \mathrm{e}^{-x} \sin y + \mathrm{e}^{-x}y \cos y + \mathrm{i}\left(-\mathrm{e}^{-x}x \cos y + \mathrm{e}^{-x} \cos y - \mathrm{e}^{-x}y \sin y\right).$$

Toinen tapa on päätellä "ohtaluulla" f:n lauseke z:n funktiona ja käyttää tunnettujen funktioiden derivointikaavoja. Sitä varten kirjoitetaan f muodossa

$$f(z) = -y\mathrm{e}^{-x}\left(\cos y - \mathrm{i} \sin y\right) + \mathrm{i}x\mathrm{e}^{-x}\left(\cos y - \mathrm{i} \sin y\right) = -y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} + \mathrm{i}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y},$$

missä käytettiin Eulerin kaavaa $\mathrm{e}^{y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y$. Edellisestä saadaan

$$f(z) = -y\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{i}x\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}z\mathrm{e}^{-z},$$

jonka derivaataksi saadaan tulon derivoimissäännöllä

$$f'(z) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{i}z\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}(z - 1)\mathrm{e}^{-z},$$

joka on luonnollisesti sama kuin aiemmin laskettu, mutta hieman nätimmässä muodossa.

c) Koska $f(z)$ on moniarvoinen, ei derivaatta ole järkevä käsite, ellei kiinnitetä haaraa. Kirjoitetaan $w = z^{1/2}$, jolloin $w^2 = z$ ja eksponenttiesityksen avulla saadaan kaksi vaihtoehtoa:

$$w = |z|^{1/2}e^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}} \quad \text{tai} \quad w = |z|^{1/2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2} + \pi\right)} = -|z|^{1/2}e^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}}.$$

Molemmissa haaroissa jokaista $0 \neq z \in \mathbb{C}$ kohti löytyy tasan yksi $w \in \mathbb{C}$, jolle $w^2 = z$, eli $g(z) = z^2$ on funktion $f(z) = z^{1/2}$ käänteisfunktio. Tällöin käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$f'(z) = \frac{1}{g'(w)}, \quad z = g(w).$$

Koska $g'(w) = 2w = 2z^{1/2}$, niin juurifunktion derivaatta on

$$f'(z) = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

molemmissa haaroissa. Koska neliöjuurifunktio $x \mapsto x^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}$, ei ole derivoituva nollassa, ei juurifunktio $f(z)$ ole derivoituva origossa $z = 0$.

2. Käytetään hyväksi luentojen tulosta (luentoviikon 3 Lause 4), jonka mukaan funktiolla

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

on derivaatta pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$, jos ósittaisderivaatat u_x, u_y, v_x, v_y ovat jatkuvia pisteen z_0 ympäristössä ja Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

toteutuvat pisteessä z_0.

a) Nyt

$$u(x, y) = \mathrm{Re} f(z) = x^3 + 3xy^2 - 3x \quad \text{ja} \quad v(x, y) = \mathrm{Im} f(z) = y^3 + 3x^2y - 3y,$$

jotka ovat selvästi (äärettömän monta kertaa) jatkuvasti derivoituvia ja osittaisderivaatat on helppo laskea:

$$\begin{aligned} u_x &= 3x^2 + 3y^2 - 3, & u_y &= 6xy \\ v_y &= 3y^2 + 3x^2 - 3, & -v_x &= -6xy, \end{aligned}$$

mistä nähdään, että Cauchy-Riemannin yhtälö $u_x = v_y$ toteutuu kaikkialla. Vastaavasti Cauchy-Riemannin yhtälö $u_y = -v_x$ toteutuu, kun $xy = 0$. Tämän perusteella molemmat yhtälöt ovat voimassa täsmälleen silloin, kun $x = 0$ tai $y = 0$, eli funktiolla f on derivaatta reaali- ja imaginaariakselilla.

Funktio ei kuitenkaan ole analyyttinen missään, sillä esimerkiksi millekään x-akselin pisteelle ei löydetä ympäristöä; esimerkiksi ϵ-säteistä $x = x + \mathrm{i}0$-keskistä palloa

$$B_\epsilon(x) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \epsilon\},$$

jossa f olisi analyyttinen olipa ϵ kuinka pieni tahansa (yksiulotteiselle suoralle on paha mahduttaa kaksiulotteista kiekkoa). Vastaavasti nähdään, ettei f ole analyyttinen myöskään imaginaariakselilla. Akseleiden ulkopuolella taasen f ei ole analyyttinen, sillä se ei ole edes derivoituva x- ja y-akselin ulkopuolella.

Imaginaariakselilla $x = 0$, joten sen kuvajoukko on

$$f(z) = f(0 + \mathrm{i}y) = 0^3 + 3 \cdot 0 \cdot y^2 - 3 \cdot 0 + \mathrm{i}(y^3 + 3 \cdot 0^2 \cdot y - 3 \cdot y) = \mathrm{i}(y^3 - 3y).$$

Koska funktio $y \mapsto y^3 - 3y$ saa kaikki reaalilukuarvot, on kuvajoukko uv-tason imaginaariakseli.

b) Nyt $u(x, y) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1$ ja $v(x, y) = 6xy + 2y$, joten Cauchy-Riemannin yhtälöiden mukaan on oltava

$$u_x = 6x + 2 = 6x + 2 = v_y \quad \text{ja} \quad u_y = -6y = -v_x,$$

jotka toteutuvat kaikkialla. Näin ollen f on derivoituva koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$ ja on siten analyyttinen koko $\mathbb{C}$:ssä. Tällaista funktiota, jolla on derivaatta kaikkialla, sanotaan *kokonaiseksi* funktioksi.

Koska $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, niin ryhmittelemällä termejä sopivasti nähdään, että kyseessä on itse asiassa polynomi $f(z) = 3z^2 + 2z - 1$.

Imaginaariakselin kuvajoukoksi saadaan vastaavalla tavalla kuin a)-kohdassa

$$f(z) = f(0 + \mathrm{i}y) = -3y^2 - 1 + 2y\mathrm{i},$$

eli kyseessä on paraabeli, jonka voi piirtää esimerkiksi parametricplot-toiminnolla vaikkapa WolframAlphalla tai jollakin muulla ohjelmistolla tai laskukoneella.

3. Funktio $u(x, y)$ on harmoninen, jos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nyt osittaisderivoinnit ovat suorastaan naurettavan helppoja :), mutta lasketaan ne silti

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y - 1, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x + 1, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Laskemalla osittaisderivaatat u_{xx} ja u_{yy} yhteen nähdään, että u on harmoninen kaikkialla. Sillä on siten koko kompleksitasossa olemassa *harmoninen konjugaatti* v, joka on analyyttisen funktion $f = u + \mathrm{i}v$ imaginaariosa.

Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa analyyttisille funktioille, joten on oltava

$$u_x = y - 1 = v_y.$$

Integroidaan saatu esitys v_y:lle y:n suhteen, jolloin saadaan

$$v(x, y) = \int v_y(x, y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2 - y + \varphi(x),$$

missä "integrointivakio" voi olla nyt x:n funktio, jota merkittiin φ:llä. Osittaisderivoimalla saatu v muuttujan x suhteen ja sijoittamalla derivoinnin tulos toiseen Cauchy-Riemannin yhtälöön $u_y = -v_x$ saadaan

$$v_x = \varphi'(x) = -x - 1 \quad \overset{\| \int}{\Rightarrow} \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Edellisen perusteella

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = xy - x + y + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - y - x + C\right),$$

josta itse asiassa nähdään, että kyseessä on z:n funktio $f(z) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}z^2 - (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}C$, jonka olisi saattanut riittävän vahvoilla matemaagisilla silmälaseilla päätellä jo annetusta u:n lausekkeesta.

4. Kuvauksen konformisuus on määritelty viikon 3 luentokalvoissa Määr. 3:ssa. Tutkitaaan nyt funktiota $f(z) = z^2$ pisteessä $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$ käyrien $c_1(t) = 1 + \mathrm{i}t$ ja $c_2(t) = t + 2t\mathrm{i}$ avulla. Piste z_0 on molempien käyrien piste, sillä $c_1(t_1) = c_1(2) = 1 + 2\mathrm{i}$ ja $c_2(t_2) = c_2(1) = 1 + 2\mathrm{i}$. Käyrät(suorat) siis leikkaavat tässä pisteessä.

Olkoon

$$\begin{aligned}
d_1(t) &= f(c_1(t)) = (c_1(t)^2) = (1 + \mathrm{i}t)^2 = 1 + 2t\mathrm{i} - t^2 = 1 - t^2 + 2t\mathrm{i} \ \text{ ja} \\
d_2(t) &= f(c_2(t)) = (c_2(t)^2) = (t + 2t\mathrm{i})^2 = t^2 + 4t^2\mathrm{i} - 4t^2 = -3t^2 + 4t^2\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Lasketaan käyrien c_1 ja c_2 sekä kuvausten d_1 ja d_2 derivaatat:

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= \mathrm{i}, \\
c_2'(t) &= 1 + 2\mathrm{i}, \\
d_1'(t) &= -2t + 2\mathrm{i} \text{ ja} \\
d_2'(t) &= -6t + 8t\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Tutkitaan kuvauksen venytystä r ja kiertokulmaa θ pisteessä z_0. Piste z_0 on käyrän $c_1(t)$ piste, kun $t = 2$. Tällöin $d_1'(2) = -4 + 2\mathrm{i}$,

$$\begin{aligned}
|d_1'(2)| &= \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} = r|c_1'(2)| = r \text{ ja} \\
\arg(d_1'(2)) &= \arctan\left(\frac{2}{-4}\right) + \pi + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi = \arg(c_1'(2)) + \theta \\
\Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2}{-4}\right).
\end{aligned}$$

Piste z_0 on käyrän $c_2(t)$ piste, kun $t = 1$. Tällöin $d_2'(1) = -6 + 8\mathrm{i}$,

$$\begin{aligned}
|d_2'(1)| &= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = r|c_2'(1)| \text{ ja} \\
\arg(d_2'(1)) &= \arctan\left(\frac{8}{-6}\right) + \pi + k2\pi \\
&= \arctan\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2}{-4}\right) + k2\pi = \arg(c_2'(1)) + \theta
\end{aligned}$$

Konformisuutta koskevat ehdot siis täyttyvät näille kahdelle suoralle pisteessä z_0, sillä venytys ja kiertokulma ovat samat. (Kuvatut käyrät ovat derivoituvia pisteessä z_0)

5. a) Luentojen Lauseen 4 mukaan, jos f on analyyttinen ja $f'(z_0) \neq 0$, niin f on konforminen pisteessä z_0. Tutkitaan Joukowskin funktion $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = x+\mathrm{i}y+\frac{1}{x+\mathrm{i}y} = x+\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}(y-\frac{y}{x^2+y^2})$ analyyttisyys C-R:n yhtälöiden avulla. Nyt siis $u(x,y) = x+\frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = y-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 1+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &= 1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ja}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

joten funktio on analyyttinen (osittaisderivaatat jatkuvia alueessa Ω).
Tutkitaan Joukowskin funktion derivaattaa:

$$f'(z) = 1-\frac{1}{z^2} = 0 \iff z = \pm 1.$$

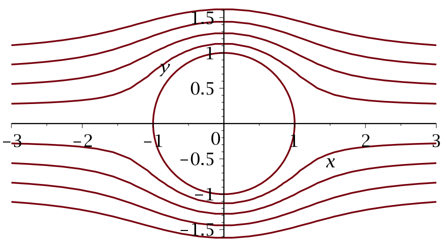
Joukowskin funktio on siis konforminen kaikkialla alueessa Ω, paitsi pisteissä $z = \pm 1$.

b) Varaus liikkuu kompleksisen potentaalifunktion $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ määräämän virtausfunktion $v(x,y)$ tasa-arvokäyriä pitkin. Edellä tutkittiin, että Joukowskin funktio on analyyttinen ja $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, $z \neq \pm 1$. Virtausfunktion tasa-arvokäyrät ovat nyt

$$v(x,y) = y-\frac{y}{x^2+y^2} = d, \ d \in \mathbb{R},$$

eli varaus liikku pitkin käyriä

$$y-\frac{y}{x^2+y^2} = d$$



Kuva 1: Virtausfunktion tasa-arvokäyriä

6. a) Yleisesti funktio kuvaa alueen reunan kuvajoukon reunaksi. Yksikköympyrän jokainen piste z voidaan kirjoittaa muodossa $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
Lavennetaan rationaalifunktio f sen nimittäjän $1+z$ konjugaatilla $\overline{1+z} = 1+\overline{z}$, jolloin f voidaan saattaa perusmuotoon

$$f(z) = \mathrm{i}\frac{1-z}{1+z} = \mathrm{i}\frac{(1+\overline{z})(1-z)}{(1+z)(1+\overline{z})} = \mathrm{i}\frac{1+\overline{z}-z-|z|^2}{1+z+\overline{z}+|z|^2} = \underbrace{\frac{2y}{1+2x+x^2+y^2}}_{=u(x,y)} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{\frac{1-x^2-y^2}{1+2x+x^2+y^2}}_{=v(x,y)}.$$

Kun $|z| = 1$, saadaan

$$f(z) = \mathrm{i}\frac{-2\mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z)}{2+2\mathrm{Re}(z)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}, \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Yksikköympyrän ylemmällä puolikkaalla $0 < \theta < \pi$. Piirtämällä kuva vaikkapa *WolframAlpha*:lla nähdään, että kuvajoukko on positiivinen u-akseli. Vastaavasti nähdään, että yksikköympyrän alemman puolikaaren kuvajoukko on negatiivinen u-akseli.
Niinpä kuvajoukossa alemman puolikkaan reuna-arvo $\phi = 1$ vastaa reuna-arvoa 1 negatiivisella u-akselilla ja reuna-arvo $\phi = 0$ vastaa reuna-arvoa 0 positiivisella u-akselilla.

b) Koska logaritmifunktio on analyyttinen ylemmässä puolitasossa, ovat sen reaali- ja imaginaariosa harmonisia funktioita. Sama asia voidaan todeta myös raa'alla derivoinnilla, mistä pitäisi tulla $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$.
Ylemmän puolikaaren $\mathbb{S}_+$ kuvajoukko on positiivinen u-akseli, jolloin $\mathrm{Arg}(w) = 0$ ja siten

$$g(w) = \log w = \ln u, \quad u > 0,$$

eli reaaliosa on $\ln u$ ja imaginaariosa on 0. Imaginaariosa on juuri mitä pitääkin reuna-arvoa koskevan vaatimuksen kannalta.
Alemman puolikaaren $\mathbb{S}_-$ kuvajoukko on negatiivinen u-akseli, jolloin $\mathrm{Arg}(w) = \pi$ ja siten

$$g(w) = \log w = \ln |u| + \mathrm{i}\pi.$$

Nyt imaginaariosa on vakio π, mikä ei ole se mitä haetaan, mutta ongelma ratkeaa, jos logaritmifunktio skaalataan tekijällä $1/\pi$.

c) Edellisen kohdan perusteella funktio

$$g(w) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}(w) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

on haettu ylemmässä puolitasossa harmoninen funktio, joka saa vaaditut reuna-arvot. Tässä arkustangentin haara kiinnitetään niin, että se saa arvoja välillä $(0, \pi)$. Koordinaattifunktioiden u ja v riippuvuus x:stä ja y:stä laskettiin jo a)-kohdassa, joten haettu sähköstaattinen potentiaali on

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right).$$

d) Tasapotentiaalikäyrät löydetään muokkaamalla yhtälöä $\phi(x, y) = c$ seuraavasti

$$\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right) = c \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = 2\tan(\pi c)y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\tan(\pi c)y = 1,$$

joka edelleen neliöön täydentämällä saadaan muotoon

$$x^2 + y^2 + 2\tan(\pi c)y + \tan^2(\pi c) = 1 + \tan^2(\pi c) \Leftrightarrow x^2 + (y + \tan(\pi c))^2 = \frac{1}{\cos^2(\pi c)},$$

eli kyseessä on ympyrän yhtälö. Tasapotentiaalikäyrät ovat siis ympyröitä (jotka kulkevat pisteiden $(\pm 1, 0)$ kautta).