Kompleksianalyysi, syksy 2021

Harjoitus 2, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Logaritmin määritelmän mukaan $\log w = \ln|w| + \mathrm{i}\arg(w)$, joten on luontevaa käyttää eksponenttiesitystä tässä tapauksessa luvulle $w = \sqrt{5} - 2$, joka on positiivinen reaaliluku. Siten $|w| = \sqrt{5} - 2$ ja $\arg(w) = 0 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}z} &= (\sqrt{5}-2)e^{k2\pi\mathrm{i}} \quad \big| \log() \\
\mathrm{i}z &= \log((\sqrt{5}-2)e^{k2\pi\mathrm{i}}) \\
\mathrm{i}z &= \ln(\sqrt{5}-2) + k2\pi\mathrm{i} \\
z &= k2\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{5}-2),\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b) Eulerin kaavojen mukaan $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})$. Näin ollen yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}) &= 2\mathrm{i} \\
e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z} &= -4 \\
e^{\mathrm{i}z} + 4\mathrm{i}e^{0} - e^{-\mathrm{i}z} &= 0 \quad \big| \cdot e^{\mathrm{i}z} \\
e^{\mathrm{i}2z} + 4e^{\mathrm{i}z} - e^{\mathrm{i}0} &= 0 \quad \big| w = e^{iz} \\
w^2 + 4w - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan $w_{\pm} = -2 \pm \sqrt{5}$. Tapaus $w_+ = -2 + \sqrt{5}$ saadaan suoraan a)-kohdasta. Tapaus $w_- = -2 - \sqrt{5}$ on muutoin sama sillä erotuksella, että nyt w_- on negatiivinen reaaliluku, jolle $|w_-| = \sqrt{5} + 2$ ja $\mathrm{Arg}(w_-) = \pi$.
Edellisen ja a)-kohdan perusteella ratkaisuiksi saadaan

$$z_+ = -\mathrm{i}\log(z_+) = k2\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{5}-2) \quad \text{ja} \quad z_- = (2k+1)\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{5}+2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. a) Nyt $\mathrm{i}^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\mathrm{i}^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{i}^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}}$. Merkitään $z = \sqrt[3]{-1}$ ja $w = -1 = e^{\mathrm{i}\pi}$. Nyt siis $z^3 = |z|^3 e^{\mathrm{i}3\varphi} = e^{\mathrm{i}(\pi + k2\pi)}$. Tästä saadaan $z_k = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3})}$. Näistä eri arvot saadaan, kun $k = 0, 1, 2$. Luku $i^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$, eli

$$\begin{aligned}
i^{-\frac{2}{3}} &= e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \ \text{ tai} \\
i^{-\frac{2}{3}} &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \ \text{ tai} \\
i^{-\frac{2}{3}} &= e^{\mathrm{i}\pi} = -1.
\end{aligned}$$

b) Olkoon $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$. Nyt $|z| = 4$ ja $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\log(2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}) &= \log(4e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k2\pi)}) \\
&= \ln(4) + \log(e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k2\pi)}) \\
&= \ln(4) + \mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k2\pi),\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Pääarvo ($k = 0$): $\ln(4) + \mathrm{i}(\frac{\pi}{3})$.

c) Käytetään hyväksi kompleksiluvun eksponenttiesitystä. Olkoon $z = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + k2\pi)}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(1 - \mathrm{i})^{\mathrm{i}} &= (e^{\log(1-\mathrm{i})})^{\mathrm{i}} \\
&= e^{\mathrm{i}\log(1-\mathrm{i})} \\
&= e^{\mathrm{i}\log(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + k2\pi)})} \\
&= e^{\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}) + \mathrm{i}\log(e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + k2\pi)})} \\
&= e^{\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + k2\pi},\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

3. Merkitään $z = x + \mathrm{i}y$, jolloin $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

a) Lavennetaan nimittäjän konjugaatilla $\overline{z+1} = \overline{z} + 1$, jolloin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{\overline{z}+1}{(z+1)(\overline{z}+1)} = \frac{\overline{z}+1}{|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1},$$

koska $z\overline{z} = |z|^2$ ja $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Sijoittamalla ylläolevaan $z = x + \mathrm{i}y$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, $\mathrm{Re}(z) = x$ ja $|z|^2 = x^2 + y^2$ saadaan haluttu muoto

$$f(z) = \frac{x+1}{x^2+y^2+2x+1} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2+2x+1},$$

eli $u(x,y) = \frac{x+1}{x^2+y^2+2x+1}$ ja $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2+2x+1}$.

b) Yksikköympyrän ylemmällä puolikkaalla voidaan käyttää parametrisointia $x = \cos\theta$ ja $y = \sin\theta$, missä $0 \leq \theta \leq \pi$. Sama asia voidaan kirjoittaa kompaktimmassa muodossa eksponenttiesityksenä $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Sijoittamalla $x = \cos\theta$ ja $y = \sin\theta$ a)-kohdassa saatuun esitykseen saadaan yksikköympyrän ylemmän puolikkaan kuvajoukoksi

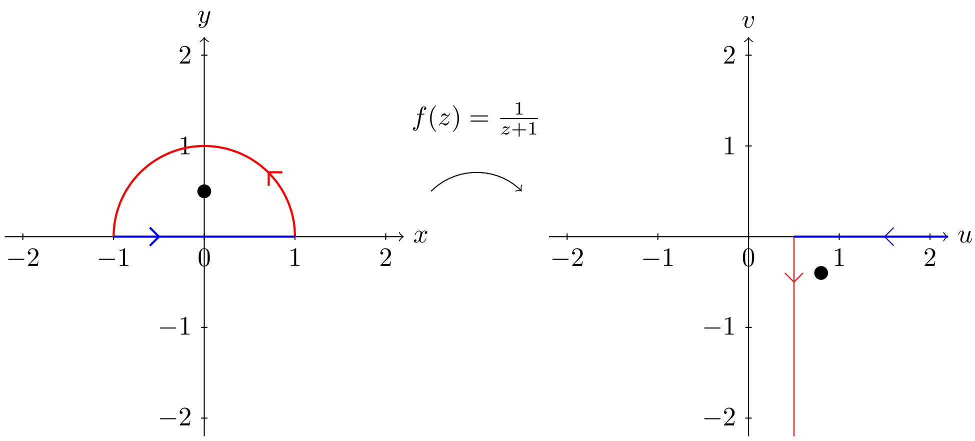
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos\theta + 1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta + 1} - \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta + 1} \\ &= \frac{1+\cos\theta}{2+2\cos\theta} - \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{2+2\cos\theta} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{2+2\cos\theta}. \end{aligned}$$

Käyttämällä sopivalla laskimella parametric plot-toimintoa tai päättelemällä, että imaginaariosa saa kaikki negatiiviset reaalilukuarvot, kun $0 < \theta < \pi$, nähdään, että kuvajoukko on v-akselin suuntainen, pisteestä $(\frac{1}{2}, 0)$ lähtevä puolisuora. Esimerkiksi *"nettilaskin" WolframAlpha* suoriutuu piirtämisestä hyvin.

Reunan toinen osa on x-akselin väli $(-1, 1)$, joka voidaan parametrisoida yksinkertaisesti $z = t = t + 0\mathrm{i}$, $-1 < t < 1$. Janan kuvajoukoksi saadaan

$$f(t) = \frac{1}{t+1} \in (\frac{1}{2}, \infty), \quad \text{kun } -1 < t < 1.$$

Kuvaan 1 on piirretty yksikkökiekon ylemmän puolikkaan $\mathbb{D}_+$ reunan kuvajoukko ja sisäpisteen $\frac{1}{2}\mathrm{i}$ kuvapiste $f(\frac{1}{2}\mathrm{i}) = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$. Reunan suunnistus on merkitty näkyviin. Huomaa, että alue jää reunan vasemmalle puolelle myös kuvapuolella. Kuvajoukko $f(\mathbb{D}_+)$ on siis puolitaso, jonka "nurkkapiste" on $(\frac{1}{2}, 0)$.



Kuva 1: Funktion $f(z) = \frac{1}{z+1}$ kuvajoukko $f(\mathbb{D}_+)$ yksikkökiekon ylemmälle puolikkaalle $\mathbb{D}_+$.

4. Parametrit a, b, c, d voidaan ratkaista systemaattisesti matriisialgebran keinoin yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} f(z_1) = w_1, \\ f(z_2) = w_2, \\ f(z_3) = w_3, \end{cases}$$

mutta ratkaistaan parametrit *ad hoc*-tyyppisesti järkeilemällä. Piste $z_2 = 0$ on hyvä lähtökohta, sillä se antaa suoraan

$$f(z_2) = f(0) = \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = d \quad \text{ja} \quad d \neq 0.$$

Ehto $d \neq 0$ seuraa myös ehdosta $ad - bc = (a-c)d \neq 0$. Sijoitetaan saatu $b = d$ yhtälöihin $f(-1) = -\mathrm{i}$ ja $f(1) = \mathrm{i}$, jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{a+d}{c+d} &= \mathrm{i} \\ \frac{-a+d}{-c+d} &= -\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d &= c\mathrm{i} + d\mathrm{i} \\ -a+d &= c\mathrm{i} - d\mathrm{i}. \end{cases}$$

Laskemalla jälkimmäiset yhtälöt puolittain yhteen saadaan eliminoitua a ja voidaan ratkaista $c = -\mathrm{i}d$. Sijoittamalla saatu ratkaisu vaikkapa yhtälöön $a + d = c\mathrm{i} + d\mathrm{i}$ saadaan $a = d\mathrm{i}$. Näin ollen kysytty Möbius-kuvaus on

$$f(z) = \frac{d\mathrm{i}z + d}{-d\mathrm{i}z + d} = \frac{d(\mathrm{i}z+1)}{d(-\mathrm{i}z+1)} \overset{d\neq 0}{=} \frac{\mathrm{i}z+1}{-\mathrm{i}z+1}.$$

Jokainen reaaliakselilla oleva piste on muotoa $z = t \in \mathbb{R}$, jolloin

$$f(t) = \frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}.$$

Koska osoittaja ja nimittäjä ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, on

$$|f(t)| = \frac{|1+\mathrm{i}t|}{|1-\mathrm{i}t|} = 1.$$

Reaaliakselin kuva on siis yksikköympyrä.

5. a) Suoralla $x = 1$ on $w = u + \mathrm{i}v = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = 1 - y^2 + 2y\mathrm{i}$, joka vastaa uv-tasossa paraabelia.

   b) Kun $xy = 1$, on $y = 1/x$ ja $z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{=u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{=v(x,y)} \cdot \mathrm{i} = x^2 - 1/x^2 + 2\mathrm{i}$. Koska $x^2 + 1/x^2$ käy läpi kaikki reaalilukuarvot, on kuvaaja u-akselin suuntainen suora.

   c) Ympyrän $|z-1| = 1$ keskipiste on $1 = 1+0\mathrm{i}$ ja säde 1. Käytetään parametriesitystä $x = 1+\cos\theta$ ja $y = \sin\theta$, jolloin

   $$w = (x+y\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = (1+\cos\theta)^2 - \sin^2\theta + 2(1+\cos\theta)\sin\theta \cdot \mathrm{i}$$

   Tekemällä toiseen korotus ja käyttämällä kaavaa $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ saadaan

   $$w = 2(1+\cos\theta)\cos\theta + \mathrm{i}\cdot(2(1+\cos\theta)\sin\theta) = 2(1+\cos\theta)e^{\mathrm{i}\theta},$$

   jonka kuvaaja on uv-tasossa kardioidi.

Alueiden kuvat on piirretty Kuvaan 2.

6. a) Origokeskinen a-säteinen ympyrä voidaan parametrisoida, jolloin jokainen ympyrällä oleva piste z on muotoa $z = ae^{\mathrm{i}\theta}$, missä a on vakio ja $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin

   $$w = u + \mathrm{i}v = \mathrm{Log}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\, z = \ln a + \mathrm{i}\theta, \quad \theta \in]-\pi, \pi].$$

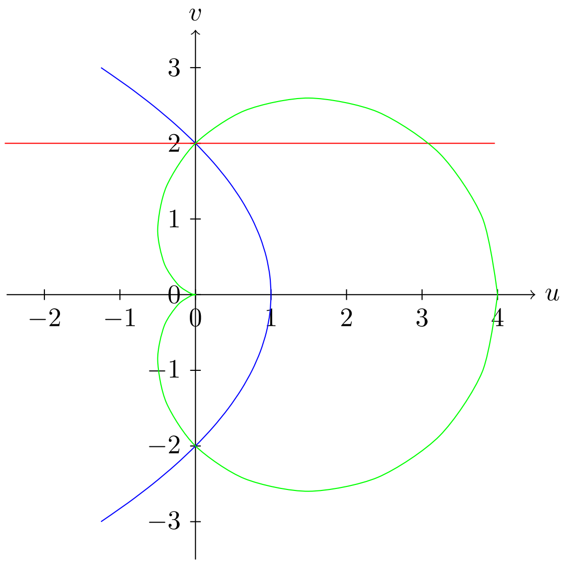
   Koska a on vakio, niin kunkin ympyrän kuva on v-akselin suuntainen jana, joka leikkaa u-akselin pisteessä $(\ln a, 0)$ ja jonka v-koordinaatti on välillä $]-\pi, \pi]$.
   Erityisesti, kun $a = 1$, on kuva imaginaariakselilla oleva jana, sillä $\ln 1 = 0$. Katso Kuva 3.

   b) Säde voidaan parametrisoida niin, että jokainen säteellä oleva piste z on muotoa $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$, missä nyt α on vakio ja $r \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

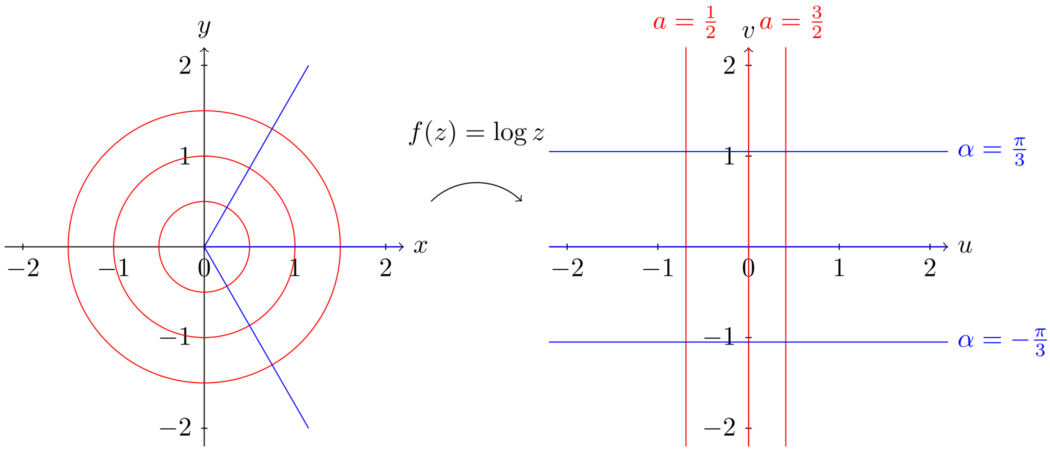
   $$w = u + \mathrm{i}v = \ln r + \mathrm{i}\alpha.$$

   Koska $r \in \mathbb{R}_+$, niin $\ln r$ saa kaikki reaalilukuarvot, joten kuvapisteet edustavat uv-tasossa reaaliakselin suuntaisia suoria, jotka leikkaavat imaginaariakselin pisteessä $(0, \alpha)$.
   Erityisesti, kun $\alpha = 0$, niin kuvapisteet muodostavat reaaliakselin. Katso Kuva 3.

   c) Kuvasta 3 nähdään, että säteet ja ympyrät sekä niiden kuvat leikkaavat toisensa kohtisuorasti.



Kuva 2: Tehtävän 5 kuvajoukot.



Kuva 3: Logaritmifunktion kuvia ympyröille ja säteille