Kompleksianalyysi, syksy 2021

Harjoitus 1, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. Merkitään $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, jolloin $z = w^4$.

a) Kompleksiluvun z reaaliosa, imaginaariosa ja itseisarvo voidaan selvittää joko suorittamalla potenssiin korotus tai käyttämällä joko napakoordinaattiesitystä tai eksponenttiesitystä. Tarkastellaan tässä napakoordinaattiesitystä. Sitä varten lasketaan ensin w:n itseisarvo $|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, joten w voidaan kirjoittaa muodossa

$$w = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \overset{\text{merk.}}{=} |w|w_0,$$

missä $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ on yksikköympyrän piste. Se voidaan määrätä geometrisesti yksikköympyrän avulla tai algebrallisesti ratkaisemalla yhtälöpari

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Yksikköympyrän perusteella $\varphi = \frac{\pi}{3}$, johon päädytään myös ratkaisemalla yhtälöpari. Niinpä luentojen mukaan z:lle saadaan napakoordinaattiesitys

$$\begin{aligned} z &= |w|^4 \left(\cos(4\varphi) + \mathrm{i}\sin(4\varphi)\right) = 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus on luettu yksikköympyrästä. Reaaliosa on siis $\mathrm{Re}(z) = -8$ ja imaginaariosa $\mathrm{Im}(z) = -8\sqrt{3}$.

b) Edellä ratkaistiin jo napakoordinaattiesitys, josta saadaan suoraan eksponenttiesitys

$$z = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3} + k\cdot 2\pi\right)},$$

sillä se on käytännössä napakoordinaattiesitys vieläkin kompaktimmassa ja näppärämmässä muodossa. Koska a)-kohdan mukaan

$$\arg(z) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

niin valitsemalla erityisesti $k = -1$ löydetään välillä $]-\pi, \pi]$ oleva argumentin arvo, eli

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Vaikka nyt

$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(w^4) = -\frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3} = 4\cdot\frac{\pi}{3} = 4\cdot\mathrm{Arg}(w),$$

niin usein on hyödyllistä huomata, että $\mathrm{Arg}(z^4)$ ja $4\cdot\mathrm{Arg}(z)$ ovat 2π:n monikertaa vaille samat. Tätä ominaisuutta itse asiassa hyödynnettiin a)-kohdassa.

2. a) Eulerin kaavan

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t) \tag{1}$$

mukaan

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \quad \text{ja} \quad \sin(\omega t) = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right),$$

joten

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \mathrm{Re}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left((A - \mathrm{i}B)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right).$$

Faasori on siis $\alpha = A - \mathrm{i}B$.

b) Vastaavalla tavalla kuten a)-kohdassa saadaan

$$\cos(\omega t + \gamma_1) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\gamma_1)}\right) \quad \text{ja} \quad \sin(\omega t + \delta_1) = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta_1)}\right),$$

joten

$$\begin{aligned} A_1\cos(\omega t + \gamma_1) + B_1\sin(\omega t + \delta_1) &= \mathrm{Re}\left(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\gamma_1)} - \mathrm{i}B_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta_1)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left((A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1} - \mathrm{i}B_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right). \end{aligned}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin eksponenttifunktion laskusääntöä $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$. Tämän perusteella yleisen sinimuotoisen jännitteen faasori on

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m}\left(A_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_k} - \mathrm{i}B_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_k}\right).$$

Edelleen Eulerin kaavan (1) mukaan

$$\begin{aligned} A_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_k} - \mathrm{i}B_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_k} &= A_k\cos(\gamma_k) + \mathrm{i}A_k\sin(\gamma_k) - \mathrm{i}B_k\cos(\delta_k) + B_k\sin(\delta_k) \\ &= A_k\cos(\gamma_k) + B_k\sin(\delta_k) + \mathrm{i}\left(A_k\sin(\gamma_k) - B_k\cos(\delta_k)\right), \end{aligned}$$

jonka perusteella yleisen sinimuotoisen jännitteen faasorin reaaliosa on

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \sum_{k=1}^{m}\left(A_k\cos(\gamma_k) + B_k\sin(\delta_k)\right)$$

ja imaginaariosa on

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \sum_{k=1}^{m}\left(A_k\sin(\gamma_k) - B_k\cos(\delta_k)\right).$$

3. a) On määrättävä kaikki yhtälön $z^4 = w = -1$ ratkaisut $z = \sqrt[4]{w}$. Käytetään eksponenttiesitystä, jonka mukaan $z = r_z e^{\mathrm{i}\phi_z}$ ja $w = r_w e^{\mathrm{i}\phi_w}$. Tällöin $r_w = |w| = 1$, $\phi_w = \pi$ ja $z^4 = r_z^4 e^{\mathrm{i}4\phi_z}$. Näin saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} r_z^4 = r_w \\ 4\phi_z = \phi_w + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_z = \sqrt[4]{r_w} = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \phi_z = \frac{\phi_w}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Juuret ovat siten eksponenttimuodossa esitettynä $z_k = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{4})}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Yksikköympyrän avulla saadaan
$z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$, $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$, $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ ja $z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$.

b) Selvästikään $z = 0$ ei ole ratkaisu, joten jakamalla puolittain z:lla, saadaan yhtälö muotoon

$$-1 = \frac{(z-1)^4}{z^4} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^4 = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{\text{merk.}}{=} w^4.$$

Käytetään hyväksi a)-kohtaa, jonka mukaan w:lle saadaan 4 eri arvoa. Valitaan aluksi $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ (joka on a)-kohdan z_0). Muuttujaksi z saadaan

$$1 - \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{(\sqrt{2}-1) - \mathrm{i}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1) - \mathrm{i}}.$$

Ratkaisu saadaan perusmuotoon laventamalla nimittäjän konjugaatilla $(\sqrt{2}-1) + \mathrm{i}$, minkä mukaan eräs ratkaisu on

$$z = \frac{\sqrt{2}((\sqrt{2}-1) + \mathrm{i})}{(\sqrt{2}-1)^2 + 1} = \frac{(2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\mathrm{i}}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\mathrm{i} = \frac{1 + (\sqrt{2}+1)\mathrm{i}}{2}.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa imaginaariosa on lavennettu $(2+\sqrt{2})$:lla. Vastaavalla tavalla muiksi ratkaisuiksi saadaan

$$z = \frac{1 - (\sqrt{2}+1)\mathrm{i}}{2}, \ z = \frac{1 + (\sqrt{2}-1)\mathrm{i}}{2} \ \text{ ja } \ z = \frac{1 - (\sqrt{2}-1)\mathrm{i}}{2}$$

Sijoittamalla saadut ratkaisut kompleksitasoon nähdään, että ratkaisut esiintyvät konjugaattipareina. Näin kuuluikin olla, sillä yleisesti reaalikertoimisen polynomin kompleksiset nollakohdat esiintyvät konjugaattipareina.

4. a) Merkitään $z^2 = w$, jolloin yhtälö $z^4 + z^2 + 1 = 0$ on toisen asteen yhtälö $w^2 + w + 1 = 0$ muuttujan w suhteen. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Molemmat oikean puolen luvut ovat yksikköympyrällä. Tehtävästä 1 saadaan eksponenttiesitykset

$$w_1 \overset{\text{merk.}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \quad \text{ja} \quad w_2 \overset{\text{merk.}}{=} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

Yhtälön $z^2 = w_1$ ratkaisut saadaan merkitsemällä $z = re^{\mathrm{i}\phi}$ ja ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\phi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \phi = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ratkaisut ovat $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ja $z_1 = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Molemmat näistä on yksikköympyrällä, josta saadaan perusmuodot

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Vastaavalla tavalla yhtälön $z^2 = w_2$ ratkaisuiksi saadaan $z_2 = e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ ja $z_3 = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$, joiden perusmuodot

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

saadaan yksikköympyrästä.

b) Polynomi on muotoa $(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Huomaamalla, että polynomin nollakohdat esiintyvät konjugaattipareina $z_2 = \overline{z_0}$ ja $z_3 = \overline{z_1}$ (kuten reaalikertoimisella polynomilla kuuluukin), saadaan toisen asteen reaalikertoimiset tekijät

$$(z - z_0)(z - z_2) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2 = z^2 - z + 1$$

ja

$$(z - z_1)(z - z_3) = (z - z_1)(z - \overline{z_1}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)z + |z_1|^2 = z^2 + z + 1.$$

Edellisten tekijöiden tuloksi saadaan

$$(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^2 + 1$$

kuten pitääkin.

5. Olkoon $z = x + \mathrm{i}y$, jolloin $\mathrm{Re}\ z = x$ ja $\mathrm{Im}\ z = y$

a) Otetaan z yhteiseksi tekijäksi, joten

$$z^3 + z = z(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0, z = \mathrm{i} \text{ tai } z = -\mathrm{i}.$$

b) Logaritmi on määritelmän mukaan

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z),$$

joten

$$\mathrm{Re}(\log z) = 0 \Leftrightarrow \ln|z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 1,$$

eli kyseessä on 1-ympyrä.

c) Käytetään hyväksi eksponenttiesitystä ja merkitään

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \text{missä} \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi],$$

jolloin

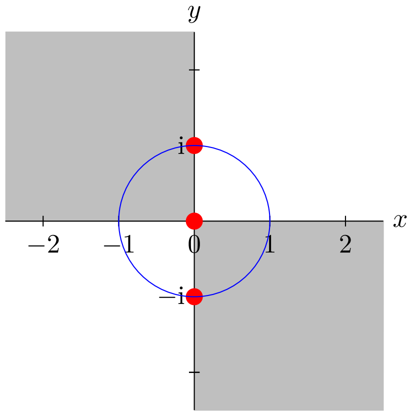
$$\mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}\left(r^2 e^{\mathrm{i}(2\varphi + k\cdot 2\pi)}\right),$$

sillä eksponenttifunktio on $2\pi\mathrm{i}$-jaksollinen. Koska argumentin pääarvon on aina välillä $(-\pi, \pi]$, saadaan ehto

$$\mathrm{Arg}(z^2) \le 0 \Leftrightarrow 2\varphi + k \cdot 2\pi \in (-\pi, 0].$$

Koska meillä on rajoite $\varphi \in (-\pi, \pi]$, nähdään, että ainoastaan $k = 0$ ja $k = -1$ antavat ratkaisuja. Kun $k = 0$, saadaan $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Kun taas $k = -1$, saadaan $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Geometrisesti kyseessä siis ovat kompleksitason toinen ja neljäs neljännes poislukien niiden toinen reuna. Ratkaisu vaikuttaa järkevältä, sillä toiseen korotus kaksinkertaistaa argumentin, joten juuri näistä alueista päädytään rajoite-ehdon mukaiseen alueeseen.

Joukkoja on havainnollistettu alla olevassa kuvassa, missä a)-kohdan pisteet on piirretty punaisella, b)-kohdan ympyrä sinisellä ja c)-kohdan sektorit harmaalla.



Kuva 1: Tehtävän 5 joukkojen geometrinen havainnollistus

6. a) Koska komponentissa on kytketty rinnan kondensaattori ja kela, niin komponentin impedanssi Z saadaan kaavasta

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega L} + \mathrm{i}\omega C = \frac{1-\omega^2 LC}{\mathrm{i}\omega L},$$

joten impedanssi on

$$Z = \frac{\mathrm{i}\omega L}{1-\omega^2 LC}.$$

Yllä ω on fysikaalinen kulmataajuus, joten on järkevää tarkastella ainoastaan tapausta $\omega \geq 0$. Koska Z on puhtaasti imaginaarinen, on $\mathrm{Arg}(Z)$ joko $\frac{\pi}{2}$ tai $-\frac{\pi}{2}$ riippuen Z:n nimittäjän merkistä. Eksponenttiesitykseksi saadaan

$$Z = |Z|e^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(Z)} = \begin{cases} \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, & \text{kun } \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, & \text{kun } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{cases}$$

b) Resonanssitaajuudella impedanssin imaginaariosa katoaa. Koska Z on nyt puhtaasti imaginaarinen, niin a)-kohdan perusteella resonanssitaajuus on $\omega = 0$, jolloin komponentti ei vastusta virtaa lainkaan.

c) Koska

$$|Z| = \left|\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\right| \to 0,$$

kun $\omega \to 0$ tai $\omega \to \infty$, niin komponentti ei vastusta virtaa lainkaan pienillä ja suurilla taajuuksilla. Niinpä komponentti vastustaa virtaa ainoastaan ”keskisuurilla” taajuuksilla, eli kyseessä on *kaistanestosuodatin*.