Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 26.11.2020

1. Määrää ja piirrä yksikköympyrän kuvajoukko, kun funktiona on
   a) $f(z) = z + \mathrm{i}$.
   b) $g(z) = \mathrm{i}z$.
   c) $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, missä f ja g ovat a)– ja b)–kohdan funktiot.

2. a) Laske funktion

$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z^2 + 1}$$

   Taylorin sarja pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä. Mikä on sarjan suppenemissäde? (4p)

   b) Laske derivaatta $f^{(2020)}(0)$ a)–kohdan funktiolle f. (2p)

3. Laske residylaskun avulla integraali

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2} \mathrm{d}x,$$

   missä a, b ovat positiivisia reaalilukuvakioita.

   Vihje:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2 + b^2} \mathrm{d}x.$$

4. Erään digitaalisen suodattimen siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{4z^2 - 4z + 4}{4z^2 - 2z + 1}.$$

   a) Määrää siirtofunktion erikoispisteet ja niiden laatu.
   b) Laske suodattimen amplitudivaste $G(\omega) = |\mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|$ (reaalimuuttujan ω reaaliarvoisena funktiona).
   c) Mitä suodatin tekee taajuudella $\omega = \frac{\pi}{3}$ värähtelevälle syötteelle?

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y) \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + i\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n} e^{i\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-i\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-i\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä