Kompleksianalyysi, syksy 2020

Harjoitus 7, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Hahmotellaan ensin jonoa $(c_2(n))_{n=0}^{\infty}$. Koska $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n} = (-1)^n$, on jonon joka toinen termi nolla ja joka toinen termi on yksi. Jono $(c_2(n))_{n=0}^{\infty}$ on siis muotoa

$$(c_2(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots).$$

Yllä olevasta esityksestä nähdään, että jonolla $(c_2(n))$ kertominen nollaa parittoman indeksin termit jonosta $(x(n))$, eli

$$(x(n)c_2(n))_{n=0}^{\infty} = (x(0), 0, x(2), 0, x(4), 0, \dots).$$

Tämän perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2} = x(0) + 0 \cdot x(1)z^{-1/2} + x(2)z^{-1} + 0 \cdot x(3)z^{-3/2} + x(4)z^{-2} + \dots,$$

jonka perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2} = \sum_{k=0}^{\infty} x(2k)z^{-k}.$$

Koska $c_2(2k) \equiv 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, on $x(2k) = x(2k)c_2(2k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja päädytään tulokseen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n)c_2(2n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2}.$$

b) Määritelmän mukaan desimoidun signaalin Z-muunnos on

$$X_{\downarrow 2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\downarrow 2}(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(2n)z^{-n}.$$

Tästä ei vielä nähdä, miten desimoidun signaalin Z-muunnos voidaan laskea alkuperäisen jonon $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnoksen avulla. Mutta jos termiä $x(2n)$ kerrotaan luvulla $c_2(2n) \equiv 1$ (eli ei tehdä käytännössä mitään) ja käytetään a)-kohdan tulosta saadaan

$$\begin{aligned}
X_{\downarrow 2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n/2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(-1)^n z^{-n/2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\sqrt{z})^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(-\sqrt{z})^{-n} \\
&= \frac{1}{2}X(\sqrt{z}) + \frac{1}{2}X(-\sqrt{z}),
\end{aligned}$$

missä $X(z)$ on jonon $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos.

2. Siirtofunktion nimittäjän nollakohdat ovat

$$z^2 + 7z + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -3 \text{ tai } z = -4.$$

Nämä ovat myös $H(z)$:n navat (kl. 1), sillä osoittajan nollakohta on 0. Impulssivaste saadaan laskettua nyt residylauseen avulla (erikoispisteet $z_1 = -3$ ja $z_2 = -4$):

$$\begin{aligned}
h(k) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{z^k}{(z+3)(z+4)}\mathrm{d}z \\
&= \operatorname*{Res}_{z=-3} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-4} f(z) = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{z^k}{(z+3)(z+4)} + \lim_{z\to -4}(z+4)\frac{z^k}{(z+3)(z+4)} \\
&= \frac{(-3)^k}{1} + \frac{(-4)^k}{-1} = (-1)^k(3^k - 4^k).
\end{aligned}$$

Impulssivaste on siis $h(k) = (-1)^k(3^k + 4^k),\ k = 0, 1, 2, \dots.$

3. a) Koska $|z| > 1$, kehitetään $\mathbf{H}(z)$ z^{-1}:n mukaan eteneväksi sarjaksi seuraavasti

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+z^{-2}} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(-z^{-2})} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2(k+1)}$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{l-1}}_{=h(2l)} z^{-2l}.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa tehtiin summausindeksin vaihto $k+1=l$.

b) Erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat $z = \pm\mathrm{i}$, jotka molemmat ovat yksinkertaisia napoja. Jaetaan nimittäjä tekijöihin ja tehdään OMK:

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{(z+\mathrm{i})-(z-\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z+\mathrm{i}}.$$

Koska $|z| > 1$, kehitetään molemmat termit z^{-1}:n mukaan eteneväksi sarjaksi. Ensimmäiselle termille saadaan

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{i}z^{-1}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^k z^{-k}.$$

Vastaavasti toiselle termille saadaan

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{i}z^{-1}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-\mathrm{i}z^{-1})} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^k z^{-k}.$$

Yhdistetään termit, jolloin

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}z}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{i}^k - (-\mathrm{i})^k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{i}^k - (-\mathrm{i})^k\right)}_{=h(k+1)} z^{-(k+1)}. \tag{1}$$

Kun k on parillinen, niin $i^k = (-\mathrm{i})^k$, jolloin z^{-k}:n kerroin häviää. Kun taas k on pariton, eli muotoa $k = 2l-1$, $l = 1, 2, \dots$, niin

$$\mathrm{i}^k - (-\mathrm{i})^k = \mathrm{i}^{2l-1} + (-1)^{2l}\mathrm{i}^{2l-1} = 2\mathrm{i}^{2l-1} = 2\mathrm{i} \cdot (-1)^{l-1},$$

sillä $\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$ ja $\mathrm{i}^{2l-1} = \mathrm{i}^{-1} \cdot (\mathrm{i}^2)^l = (-1)^{l-1}\mathrm{i}$. Tämän perusteella

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{z}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}z^{-(2l-1)} = \sum_{l=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{l-1}}_{=h(2l)} z^{-2l}$$

c) Käänteismuunnoksen kaava

$$h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r}\mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z,$$

missä S_r on r-säteinen ympyrä, joka sisältyy alueeseen $|z| > 1$. Kun $k = 0$, on integrandilla yksinkertainen napa origossa. Residyksi saadaan residyn laskentakaavalla

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\mathbf{H}(z)z^{-1} = \lim_{z\to 0}\mathbf{H}(z) = 1.$$

Muut erikoispisteet ovat $z = \pm\mathrm{i}$, jotka ovat ensimmäisen kertaluvun napoja. Residyiksi saadaan

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\mathbf{H}(z)z^{k-1} = \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\frac{z^{k-1}}{1+z^2} = \frac{\mathrm{i}^{k-1}}{2\mathrm{i}} \qquad \operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}}\mathbf{H}(z)z^{k-1} = -\frac{(-\mathrm{i})^{k-1}}{2\mathrm{i}}.$$

Tällöin residylauseen mukaan saadaan

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{i}^{k-1} - (-\mathrm{i})^{k-1}\right), & \text{kun } k \geq 1, \\ 1 + \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} + \frac{1}{\mathrm{i}}\right) = 0, & \text{kun } k = 0, \end{cases}$$

joka esityksen (1) ja kohdan b) mukaan johtaa samaan lopputulokseen kuin muutkin lähestymistavat.

Vaste on tässä tapauksessa helpoin määrätä muunnospuolella, sillä

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} = 1 + z^{-2} = z^{-2}(1+z^2) \Rightarrow Y(z) = \mathbf{H}(z)X(z) = z^{-2} \Rightarrow y(n) = \delta(n-2).$$

4. Teorian mukaan taajuusvastefunktio saadaan jonon diskreettinä Fourier-muunnoksena: $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(n)\}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-\mathrm{i}\omega n}$. Taajuusvastefunktio on siis

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} = \sum_{n=0}^{2} h(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} = h(0) + h(1)e^{-\mathrm{i}\omega} + h(2)e^{-\mathrm{i}2\omega} + h(3)e^{-\mathrm{i}3\omega} + h(4)e^{-\mathrm{i}4\omega} \\
&= \frac{1}{35}\left(-3 + 12e^{-\mathrm{i}\omega} + 17e^{-\mathrm{i}2\omega} + 12e^{-\mathrm{i}3\omega} - 3e^{-\mathrm{i}4\omega}\right) \\
&= \frac{1}{35}e^{-2\mathrm{i}\omega}\left(17 + 24\cos\omega - 6\cos(2\omega)\right).
\end{aligned}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin kaavakokoelmasta löytyvää kaavaa

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}).$$

Amplitudivasteeksi saadaan

$$|H(\omega)| = \frac{1}{35}|17 + 24\cos\omega - 6\cos(2\omega)|$$

ja vaihevasteeksi

$$\theta(\omega) = \arg H(\omega) = \begin{cases} -2\omega, & \text{kun } 17 + 24\cos\omega - 6\cos(2\omega) \geq 0, \\ -2\omega + \pi, & \text{kun } 17 + 24\cos\omega - 6\cos(2\omega) < 0, \end{cases}$$

(2π:n monikertaa vaille).

5. Lasketaan differenssiyhtälön puolittainen diskreetti Fourier-muunnos:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \tfrac{1}{4}X(\omega)e^{-\mathrm{i}0\omega} + \tfrac{1}{4}X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4}X(\omega)e^{-\mathrm{i}2\omega} \\
&= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{-\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4}e^{-\mathrm{i}2\omega}\right)X(\omega) \\
&= H(\omega)X(\omega) \\
H(\omega) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{-\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4}e^{-\mathrm{i}2\omega} = e^{-\mathrm{i}\omega}\left(\tfrac{1}{4}e^{\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{-\mathrm{i}\omega}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}e^{-\mathrm{i}\omega}\left(2 \cdot \tfrac{e^{\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega}}{2} + 1\right) \\
&= \tfrac{1}{4}(2\cos(\omega) + 1)e^{-\mathrm{i}\omega} = R(\omega)e^{\mathrm{i}\phi(\omega)}
\end{aligned}$$

Ampliditudivaste:

$$|H(\omega)| = |R(\omega)| = \tfrac{1}{4}|2\cos(\omega) + 1|$$

Vaihevaste:

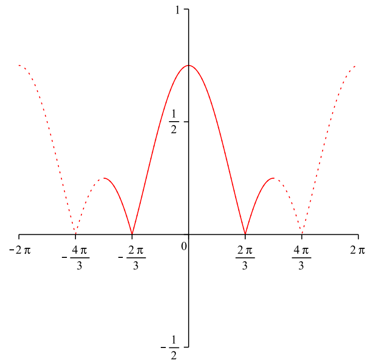
$$\begin{aligned}
\theta(\omega) &= \arg(H(\omega)) = \arg(2\cos(\omega) + 1) + \arg(e^{-\mathrm{i}\omega}) \\
&= \begin{cases} -\omega\,, & \text{kun } 2\cos(\omega) + 1 \geq 0 \\ \pi - \omega\,, & \text{kun } 2\cos(\omega) + 1 < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Amplitudivasteen nollakohdat ω:

$$1 + 2\cos\omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\omega = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \omega = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi,\; n \in \mathbb{Z}$$

Nollakohdista välillä $[-\pi, \pi]$ ovat pisteet $-\frac{2\pi}{3}$ ja $\frac{2\pi}{3}$.

Amplitudivasteen kuvaaja



6. a) Ottamalla Z-muunnos puolittain yhtälössä

$$y(n) = 2r\cos(\omega_0)y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n), \tag{2}$$

ja käyttämällä viiveen muunnoskaavaa

$$x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{H}(z)z^{-k},$$

joka löytyy kaavoista, saadaan yhtälö

$$Y(z) = 2r\cos(\omega_0)z^{-1}Y(z) - r^2z^{-2}Y(z) + X(z) \Leftrightarrow (1 - 2r\cos(\omega_0) + r^2)Y(z) = X(z).$$

Määritelmän mukaan siirtofunktio on vasteen ja herätteen Z-muunnoksien osamäärä, joten

$$\mathbf{H}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}.$$

b) Suodatin on stabiili täsmälleen silloin, kun siirtofunktion navat ovat yksikköympyrän sisällä. Siirtofunktion navoiksi saadaan

$$1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2r\cos(\omega_0)z + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = r\cos(\omega_0) \pm r\sqrt{\cos^2(\omega_0) - 1}.$$

On kaksi vaihtoehtoa. Kun $\omega_0 = n\pi$, on diskriminantti nolla, jolloin $z = r\cos(\omega_0) = (-1)^n r$ on kaksinkertainen reaalinen napa. Tällöin suodatin on stabiili täsmälleen silloin, kun $|z| = r < 1$. Toisessa vaihtoehdossa $|\cos(\omega_0)| < 1$, jolloin diskriminantti on negatiivinen ja navat

$$z_\pm = r\left(\cos(\omega_0) \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - \cos^2(\omega_0)}\right) = r\left(\cos(\omega_0) \pm \mathrm{i}\sin(\omega_0)\right)$$

ovat kompleksisia. Nämäkin ovat yksikköympyrän sisällä jos ja vain jos $r < 1$.
Johtopäätös on, että **suodatin on stabiili täsmälleen silloin, kun r < 1**.
Taajuusvastefunktio $H(\omega)$ saadaan siirtofunktiosta $\mathbf{H}(z)$ sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$, eli

$$H(\omega) = \mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}}.$$

Kun $r = 1$ ja $\omega \to \omega_0$, niin Eulerin kaavan mukaan

$$\begin{aligned}
1 - 2r\cos(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega} &= 1 - 2\cos(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega} \\
&\to 1 - 2\cos(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0} \\
&= 1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0} - 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Taajuusvastefunktion nimittäjä lähestyy siis nollaa. Tämän vuoksi (digitaalista kulma)taajuutta ω_0 sanotaan *resonanssitaajuudeksi.*

c) Kun $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ja $r = 0.9$, ollaan b)-kohdan mukaan stabiililla alueella ja nollakohdat ovat kompleksisia

$$z_\pm = r\left(\cos(\omega_0) \pm \sin(\omega_0)\right) = \pm 0.9\mathrm{i}.$$

Jakamalla siirtofunktion nimittäjä tekijöihin voidaan se saattaa muotoon

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z^2}{(z - z_+)(z - z_-)}.$$

Kaavoista löytyy Z-käänteismuunnoksen kaava

$$h(k) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z,$$

missä origokeskinen r-säteinen ympyrä S_r sulkee sisäänsä kaikki siirtofunktion $\mathbf{H}(z)$ navat. Koska navat ovat yksikköympyrän sisällä, voidaan valita $r = 1$. Toisaalta r:n valinnalla ei ole merkitystä, sillä residylaskun mukaan

$$h(k) = \mathrm{Res}_{z=z_+} \mathbf{H}(z) z^{k-1} + \mathrm{Res}_{z=z_-} \mathbf{H}(z) z^{k-1}$$

olipa $r \geq 1$ mikä hyvänsä.
Koska navat $z = z_\pm$ ovat yksinkertaisia, saadaan residyn laskentakaavasta

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$$

tai kätevästä laskentakaavasta impulssivasteeksi

$$\begin{aligned}
h(k) &= \mathrm{Res}_{z=z_+} \frac{z^{k+1}}{(z - z_+)(z - z_-)} + \mathrm{Res}_{z=z_-} \frac{z^{k+1}}{(z - z_+)(z - z_-)} \\
&= \frac{1}{z_+ - z_-} z_+^{k+1} + \frac{1}{z_- - z_+} z_-^{k+1} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} (0.9\mathrm{i})^{k+1} - \frac{1}{2\mathrm{i}} (-0.9\mathrm{i})^{k+1} \\
&= \frac{1}{2} 0.9^{k+1} (\mathrm{i}^k + (-\mathrm{i})^k).
\end{aligned}$$

Kun k on pariton eli muotoa $k = 2n + 1$, on $\mathrm{i}^k + (-\mathrm{i})^k = 0$. Kun taas k on parillinen eli muotoa $k = 2n$, on $\mathrm{i}^k + (-\mathrm{i})^k = \mathrm{i}^{2n} + (-\mathrm{i})^{2n} = 2(-1)^n$, sillä $\mathrm{i}^2 = -1$. Tämän perusteella

$$h(k) = \begin{cases} (-1)^{k/2} \cdot 0.9^{k+1}, & \text{kun } k \text{ on parillinen,} \\ 0, & \text{kun } k \text{ on pariton.} \end{cases}$$