

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 7, syksy 2020

Esitehtävä löytyy Moodlesta. Suositellaan laskettavaksi tehtävät 3 ja 6.

1. Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä käytetään desimointioperaatiota $\downarrow 2$, jossa alkuperäisestä näytteistetyistä signaalista poimitaan parilliset näytteet. Matemaattisesti suhteella 2 desimointi vastaa systeemiä, jonka vaste $y(n)$ määräytyy herätteestä $x(n)$ kaavalla

$$y(n) \stackrel{\text{merk.}}{=} x_{\downarrow 2}(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Määritellään jono $c_2(n)_{n=0}^{\infty}$ asettamalla

$$c_2(n) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\pi n}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Osoita, että kaikille jonoille $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ pätee tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n)c_2(2n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2}.$$

- b) Laske desimoidun signaalin Z -muunnos $X_{\downarrow 2}(z) = \mathcal{Z}(x_{\downarrow 2})(z)$ käyttämällä identiteettiä

$$x_{\downarrow 2}(n) = x(2n) = x(2n)c_2(2n)$$

ja a)-kohdan tulosta.

2. Diskreetin kausaalisen LTI-systeemin siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z}{z^2 + 7z + 12}.$$

Määrä systeemien impulssivaste käyttämällä kaavaa

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}dz,$$

missä S_r sulkee sisäänsä kaikki $\mathbf{H}(z)$:n navat.

3. Määrä impulssivaste diskreetille kausaaliselle LTI-systeemille, jonka siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{1 + z^2}, \quad |z| > 1,$$

käyttämällä

- a) geometrisen sarjan summakaavaa.
- b) osamurtokehitemää.
- c) Z -käänteismuunnoksen kaavaa.

Mikä on systeemin vaste herätteelle

$$(x(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad \text{jolle } x(n) = 0, \text{ kun } n \geq 2?$$

4. Laske amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\theta(\omega) = \arg H(\omega)$ 5 pisteen paraboliselle suodatimelle, jonka impulssivaste on

$$(h(n))_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{35}(-3, 12, 17, 12, -3, 0, 0, \dots).$$

5. Määrittää amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\theta(\omega) = \arg H(\omega)$ suodattimelle, joka määritellään differenssiyhtälöllä

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2),$$

missä $x(n)$ on heräte ja $y(n)$ on vaste. Kirjoita taajuusvastefunktiolle $H(\omega)$ esitys $H(\omega) = R(\omega)e^{i\phi(\omega)}$, missä $R(\omega)$ ja $\phi(\omega)$ ovat reaalisia. Määrittää amplitudivasteen nollakohdat.

6. Tarkastellaan kertalukua 2 olevaa digitaalista AR-suodatinta, joka määritellään differenssiyhtälöllä

$$y(n) = 2r \cos(\omega_0)y(n-1) - r^2y(n-2) + x(n), \quad (1)$$

missä $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$, $0 < r \in \mathbb{R}$ sekä $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ on suodattimen heräte ja $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ on sitä vastaava vaste.

- Laske suodattimen siirtofunktio ottamalla Z -muunnos puolittain yhtälössä (1).
- Laske suodattimen taajuusvastefunktio ja tutki parametrien r ja ω_0 merkitystä. Millä ehdoilla suodatin on stabiili? Jos $r = 1$, niin mitä tapahtuu, kun $\omega \rightarrow \omega_0$?
- Laske Z -käänteismuunnoksella suodattimen impulssivaste, kun $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ja $r = 0,9$.