Kompleksianalyysi, syksy 2020

Harjoitus 6, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Kyseessä on rationaalifunktio, jonka ainoat erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat, joiksi saadaan

$$z^2(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{tai} \quad z = -1.$$

Erikoispisteiden luokittelun suhteen pitää kuitenkin olla tarkkana, sillä funktio ei välttämättä ole supistetussa muodossa kuten nyt, sillä $z = -1$ on myös osoittajan nollakohta.

Tarkastellaan aluksi nollakohtaa $z = 0$. Koska osoittajan arvo nollassa on $0^2 + 1 = 1 \neq 0$, on $z = 0$ vain nimittäjän nollakohta. Koska $z = 0$ on kaksinkertainen nimittäjän nollakohta, on se *2. kertaluvun napa*, sillä yleisesti

supistetussa muodossa olevan rationaalifunktion erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat, jotka ovat nollakohdan kertaluvun napoja.

Perustellaan harjoituksen vuoksi yllä oleva tässä erityistapauksessa. Sitä varten kirjoitetaan f muodossa

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2}, \quad \text{missä } g(z) = \frac{z^3+1}{z+1}$$

on analyyttinen funktio pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä ja $g(0) = 1$. Siten g:llä on origon ympäristössä *Taylorin sarja*

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k.$$

Kertoimien c_k tarkka lukuarvo ei meitä kiinnosta, sillä ainoastaan $g(0) = 1 \neq 0$ on merkityksellinen. Tämän mukaan f:llä on origon aidossa ympäristössä *Laurentin sarja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-2}.$$

Määritelmän mukaan $\mathbf{z_0 = 0}$ **on 2. kertaluvun napa**.

Residy voidaan määrätä joko suoraan Laurentin kehitelmän avulla tai käyttää residyn laskukaavaa

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z)\right)\Big|_{z=z_0},$$

missä derivaatan arvo pisteessä z_0 tulkitaan tarvittaessa raja-arvona. Nyt $z_0 = 0$ ja $n = 2$, joten

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2 f(z)\right)\Big|_{z=0} = g'(0) = \frac{3z^2(z+1) - (z^3+1)}{(z+1)^2}\Big|_{z=0} = -1.$$

Toinen tapa on laskea ensin g:n Laurentin sarja suorittamalla jakolasku jakokulmassa, joka tänä päivänä onnistuu helposti, kun vaan syöttää lausekkeen *WolframAlpha*:an, joka osaa kertoa lopputuloksen suoraan. Tavalla tai toisella saadaan

$$g(z) = z^2 - z + 1, \quad z \neq -1,$$

joten f:n Laurentin kehitelmä origossa on

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} = \frac{z^2 - z + 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1.$$

Residy on z^{-1}:n kerroin, eli $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -1$.

Tarkastellaan seuraavaksi pistettä $z_1 = -1$. Tällä kertaa osoittajan arvo on $(-1)^3 + 1 = 0$, joten f ei ole supistetussa muodossa. Osoittaja on kaikkialla analyyttinen, joten erityisesti pisteen $z_1 = -1$ ympäristössä sillä on Taylorin sarja

$$p(z) := z^3 + 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{(k)}(-1)}{k!}(z+1)^k.$$

Koska $p'(-1) = 3(-1)^2 \neq 0$, on $z_1 = -1$ osoittajan yksinkertainen nollakohta. Siten funktio

$$\frac{p(z)}{z+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{(k)}(-1)}{k!}(z+1)^{k-1}$$

on säännöllinen pisteen $z_1 = -1$ ympäristössä. Koska edelleen $z \mapsto 1/z^2$ on analyyttinen pisteen $z_1 = -1$ ympäristössä, sillä kertominen ei muuta tilannetta. Niinpä f voidaan kehittää Laurentin sarjaksi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+1)^k,$$

joka ei sisällä lainkaan $(z+1)$:n negatiivisia potensseja. Siten $\mathbf{z_1 = -1}$ **on poistuva erikoispiste**. Teorian mukaan residy on nolla poistuvassa erikoispisteessä (sillä Laurentin sarjassa ei ole negatiivisia potensseja z^{-k}, ja siten erityisesti potenssia z^{-1}).

b) Nyt $z \mapsto 4z$ on kokonainen funktio (eli analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$, joten se ei aiheuta mitään ongelmia. Riittää siis tarkastella ensimmäistä yhteenlaskettavaa. Osamäärässä kosini ja $z \mapsto z^2 + 1$ ovat kokonaisia funktioita, joten mahdolliset erikoispisteet löytyvät nimittäjän nollakohdista $z_\pm = \pm \mathrm{i}$. Kosinin ainoat nollakohdat ovat reaalianalyysisitä tutut $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, joten kosini on nollasta eroava pisteissä $z_\pm = \pm\mathrm{i}$.
Tarkastellaan aluksi pistettä $z_+ = \mathrm{i}$. Osamäärä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\cos z}{z^2+1} = \frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{g(z)}{z-\mathrm{i}}, \quad \text{missä } g(z) = \frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}$$

on analyyttinen pisteen $z_+ = \mathrm{i}$ ympäristössä. Siten sillä on Taylorin sarja ja saadaan

$$\frac{\cos z}{z^2+1} = \frac{1}{z-\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(\mathrm{i})}{k!}(z-\mathrm{i})^k = \frac{g(i)}{z-\mathrm{i}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(\mathrm{i})}{k!}(z-\mathrm{i})^{k-1}.$$

Edelleen, koska $g(\mathrm{i}) = \frac{\cos \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} \neq 0$, nähdään, että $\mathbf{z_+ = \mathrm{i}}$ **on yksinkertainen napa**.
Vastaavalla tavalla nähdään, että myös $\mathbf{z_- = -\mathrm{i}}$ **on yksinkertainen napa**. Residyt navoissa

$$\mathrm{Res}_{z=\pm\mathrm{i}} f(z) = g(\pm\mathrm{i}) = \frac{\cos(\pm\mathrm{i})}{\pm 2\mathrm{i}}.$$

saadaan suoraan Laurentin sarjasta. Yllä oleva merkintä tarkoittaa sitä, että osoittajassa ja nimittäjässä valitaan sama merkki kuin pisteessä, jossa residy lasketaan.

c) Tämä kohta on kinkkisempi kuin edelliset. Nähdään, että $z = 0$ on ainoa erikoispiste, mutta sen laadun selvittäminen ei onnistu määritelmän mukaisesti samalla tavalla kuin edellä. Kosinin sarjakehitelmä

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{1}$$

löytyy vaikkapa netistä

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Sijoittamalla sarjakehitelmään z:n paikalle $1 - 1/z$ saadaan sarja

$$\cos\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{2n}, \tag{2}$$

josta voidaan uskotella, että Laurentin sarja sisältää äärettömän monta z:n negatiivista potenssia. Matematiikassa usko ei vielä riitä, mutta intuitio usein johtaa oikeille raiteille.
Käytetään annettua vihjettä ja tarkastellaan funktion käyttäytymistä origon läheisyydessä. Jos $z_0 = 0$ olisi poistuva erikoispiste, pysyisi f rajoitettuna origon aidossa ympäristössä. Jos nyt kuitenkin annetaan z:n lähestyä nollaa imaginaariakselia pitkin, jota varten merkitään $z = \mathrm{i}t$, niin saadaan

$$f(\mathrm{i}t) = \cos\left(1 - \mathrm{i}\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}/t)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i}/t)}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{1/t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{-1/t}\right) \overset{t \to 0}{\to} \infty.$$

Niinpä $z_0 = 0$ ei voi olla poistuva erikoispiste.
Jää jäljelle kaksi mahdollisuutta. Jos $z_0 = 0$ olisi kertaluvun n napa, niin f voitaisiin kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{c}{z^n} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} c_k z^k$$

joillekin vakioille $c \neq 0$ ja $c_k \in \mathbb{C}$. Kun $z \to 0$, niin f menisi äärettömyyteen lähestytäänpä nollaa mistä suunnasta tahansa. Koska kuitenkin kosini saa arvoja välillä $[-1, 1]$ reaaliakselilla, nähdään, että f pysyy rajoitettuna, kun $z \to 0$ reaaliakselia pitkin. Piirtämällä funktion kuvaaja esimerkiksi *WolframAlpha*:lla reaaliakselilla origon lähellä nähdään, että funktio oskilloi rajusti. Tällainen käyttäytyminen on mahdollista ainoastaan, kun $\mathbf{z_0 = 0}$ **on oleellinen erikoispiste**. Residyn laskemiseen oleellisessa erikoispisteessä ei oikein ole muuta laskentatapaa kuin Laurentin sarjan käyttö. Sarjassa (2) esiintyvä potenssi voidaan kehittää binomikaavalla summaksi

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} (-z)^{-m} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} z^{-1} + \cdots = 1 - 2nz^{-1} + \ldots.$$

Ainoastaan z^{-1}:llä on residyn kannalta merkitystä, joten residy on

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2n) \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Summalausekkeelle löytyy tarkka arvo joko *WolframAlpha*:lla tai tunnistamalla summa kosinin sarjakehitelmän derivaataksi pisteessä $z = 1$, sillä Taylorin sarja voidaan derivoida termeittäin, mikä antaa

$$\sin(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z \Big|_{z=1} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-1} \Big|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n) \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Siten

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -\sin(1).$$

2. a) Nimittäjässä olevan toisen asteen polynomin $P(z) = z^2 + 2z + k^2$ diskriminantti on $D = 4 - 4k^2$, joten meillä on kaksi tapausta

   (i) $|k| \leq 1$, jolloin polynomin molemmat nollakohdat ovat reaalisia. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan polynomin nollakohdiksi

   $$z_+ = -1 + \sqrt{1 - k^2} \quad \text{ja} \quad z_- = -1 - \sqrt{1 - k^2}.$$

   Koska

   $$-1 - \underbrace{\sqrt{1 - k^2}}_{\geq 0} \leq -1 \quad \text{ja} \quad -1 \leq -1 + \underbrace{\sqrt{1 - k^2}}_{\leq 1} \leq -1 + 1 = 0,$$

   on z_- aina joko yksikköympyrän kehällä tai yksikköympyrän ulkopuolella. Edelleen, jos $|k| = 1$, on $z_\pm = -1$ yksikköympyrän kehällä, ja jos $|k| < 1$, on z_+ yksikköympyrän sisällä.

   (ii) $|k| > 1$, jolloin polynomin molemmat nollakohdat ovat kompleksilukuja. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan polynomin nollakohdiksi

   $$z_+ = -1 + \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1} \quad \text{ja} \quad z_- = -1 - \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1},$$

   jotka molemmat ovat yksikköympyrän ulkopuolella, sillä $\mathrm{Re}(z_\pm) = -1$ ja $\mathrm{Im}(z_\pm) \neq 0$.

   Merkitään yksikkökiekkoa symbolilla $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Yksikköympyrän sisäpuolella olevien napojen lukumäärä on

   $$\#\{z \in \mathbb{D} : z = z_\pm\} = \begin{cases} 1, & \text{kun } |k| < 1, \\ 0, & \text{kun } |k| \geq 1. \end{cases}$$

   b) Edellisen kohdan perusteella polynomilla $P(z)$ on kaksi nollakohtaa, kun $|k| \neq 1$, ja yksi nollakohta $z_\pm = -1$, kun $|k| = 1$. Näin ollen navat ovat yksinkertaisia, kun $|k| \neq 1$, ja napa $z_\pm = -1$ on kaksinkertainen.

   Jaetaan nimittäjän polynomi tekijöihin $P(z) = (z - z_+)(z - z_-)$. Yksinkertaisille navoille z_0 residy voidaan laskea kaavalla

   $$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{P(z)}.$$

   Otetaan esimerkkinä $z_+ = -1 + \sqrt{1 - k^2}$ tapauksessa $|k| < 1$. Ylläolevan kaavan mukaan

   $$\mathrm{Res}_{z=z_+} f(z) = \lim_{z \to z_+} = \frac{z - z_+}{(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2}}.$$

   Muut tapaukset voidaan laskea vastaavasti.

   Kaksinkertaiselle navalle $z_\pm = -1$ residyksi saadaan

   $$\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{(z + 1)^2}{(z + 1)^2} \right) = 0,$$

   sillä vakiofunktion 1 derivaatta on nolla.

Kootaan edellä todettu yhteen

$$\operatorname{Res}_{z=z_\pm} f(z) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}, & \text{kun } |k| < 1, \\ 0, & \text{kun } |k| = 1, \\ \mp\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}\mathrm{i}, & \text{kun } |k| > 1. \end{cases}$$

3. Merkitään $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Teorian mukaan tämän tyyppinen epäoleellinen integraali voidaan laskea residyjen avulla kaavalla $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$, missä pisteet z_k ovat eristettyjä erikoispisteitä. Tässä tapauksessa erikoispisteet ovat $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$:n navat:

$$g(z) = z^4 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})},\; k = 0, 1, 2, 3.$$

Nimittäjällä ja osoittajalla ei selvästi ole yhteisiä nollakohtia, joten nimittäjän nollakohdat ovat funktion $f(z)$ 1. kl:n napoja. Määrätään residyt navoissa, jotka sijaitsevat ylemmässä puolitasossa. Kun $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ ja $g'(z) = 4z^3$:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z_0+1}{4z_0^3} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+1}{4e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} \\ &= \frac{1}{4}(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(-\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i})) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1 + (\sqrt{2}+1)\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Kun $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $\mathrm{Im}(z_1) > 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) &= \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{z_1+1}{4z_1^3} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}+1}{4e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}}} \\ &= \frac{1}{4}(e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 + (\sqrt{2}-1)\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Koska muut navat sijaitsevat alemmassa puolitasossa, niitä ei tarvitse huomioida. Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+(\sqrt{2}+1)\mathrm{i}) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+(\sqrt{2}-1)\mathrm{i})\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Lasketaan integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{f^4+10f^2+9}\mathrm{d}f$ residyjen avulla. Tässä tapauksessa erikoispisteet ovat $|H(z)|^2 = \frac{h(z)}{g(z)}$:n navat:

$$\begin{aligned} g(z) &= z^4 + 10z^2 + 9 = 0,\; \text{merk. } w = z^2 \\ &\Leftrightarrow w^2 + 10w + 9 = 0 \\ &\qquad \Leftrightarrow w = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 9}}{2} = -5 \pm 4 \text{ jolloin} \\ &\qquad z = \pm\sqrt{-5\pm 4} = \begin{cases} \pm 3\mathrm{i} \\ \pm\mathrm{i}. \end{cases} \end{aligned}$$

Määrätään residyt navoissa, jotka sijaitsevat ylemmässä puolitasossa. Nämä navat ovat $z_0 = \mathrm{i}$ ja $z_1 = 3\mathrm{i}$. Nyt $g'(z) = 4z^3 + 20z$, joten residy pisteessä $z_0 = \mathrm{i}$ on

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} |H(z)|^2 = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{9}{4z_0^3 + 20z_0} = \frac{9}{-4\mathrm{i} + 20\mathrm{i}} = -\frac{9}{16}\mathrm{i}$$

ja pisteessä $z_1 = 3\mathrm{i}$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} |H(z)|^2 = \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{9}{4z_1^3 + 20z_1} = \frac{9}{-108\mathrm{i} + 60\mathrm{i}} = \frac{3}{16}\mathrm{i}$$

Koska muut navat sijaitsevat alemmassa puolitasossa, niitä ei tarvitse huomioida. Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{9}{16}\mathrm{i}+\frac{3}{16}\mathrm{i}\right)\\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Koska $2|H(0)|^2 = 2$, niin

$$W_{eq} = \frac{3\pi}{8}.$$

5. a) Annettu funktio on analyyttinen kaikkialla, joten Cauchyn lauseen mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

b) Nyt $z = 0$ on funktion ainoa erikoispiste. Jotta integraali voitaisiin laskea, meillä pitää tietää erikoispisteen laatu. Eksponenttifunktion sarjakehitelmän

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

mukaan

$$\mathrm{e}^{3/z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{3}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}z^{-k},$$

mistä saadaan f:n Laurentin kehitelmä

$$f(z) = z\cdot\mathrm{e}^{3/z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}z^{-k+1}, \quad |z|>0. \tag{3}$$

Tämän perusteella z^{-k}:n kerroin on erisuuri kuin nolla äärettömän monella $k\in\mathbb{Z}_+$, eli $\mathbf{z_0 = 0}$ **oleellinen erikoispiste**. Residyn laskemiseen oleellisessa erikoispisteessä ei valitettavasti ole kätevää laskukaavaa kuten navan tapauksessa, joten meillä on vain vedottava Residylauseeseen, jonka mukaan kysytty integraali on

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}_{z=0}f(z) = 2\pi\mathrm{i}\frac{3^2}{2!} = 9\pi\mathrm{i},$$

sillä määritelmän mukaan residy on z^{-1}:n kerroin Laurentin sarjakehitelmässä, joka saadaan, kun kehitelmässä (3) tarkastellaan termiä, jolle $k = 2$.

6. Määritelmän mukaan Fourier-muunnnos on

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x.$$

Lasketaan muunnos residylaskun avulla. Sitä varten pitää laskea funktion f navat. Nyt nimittäjän tekijöiden jako on helppo ja saadaan

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}.$$

Käytetään luentokalvojen viikon 6 Lausetta 5, jonka mukaan riittää tarkastella ainoastaan ylemmässä puolitasossa olevia napoja. Koska $z = \mathrm{i}$ on ainoa ylemmän puolitason napa ja sen kertaluku on kaksi, niin

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}f(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-\mathrm{i})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}f(z)\right)\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^2}\right)\Big|_{z=\mathrm{i}}\\ &= \left(-\mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^2} - 2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^3}\right)\Big|_{z=\mathrm{i}}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a\mathrm{i}}{4} + \frac{1}{4\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} + a\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{a}.$$

Residylauseen mukaan

$$F(a) = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} f(z) = \frac{\pi}{2}\left(-a+1\right)\mathrm{e}^{a} = \frac{\pi}{2}\left(|a|+1\right)\mathrm{e}^{-|a|}, \quad \text{kun } a < 0.$$

Koska f on parillinen ja reaalinen, myös sen Fourier-muunnos on parillinen ja reaalinen, joten

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\left(|a|+1\right)\mathrm{e}^{-|a|}, \text{ kun } a > 0.$$

Edellisten perusteella

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\left(|a|+1\right)\mathrm{e}^{-|a|}$$

kaikilla $a \in \mathbb{R}$.