

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 6, syksy 2020

Esitehtävä löytyy Moodlesta. Suositellaan laskettavaksi tehtävät 1 ja 5.

1. Määrää erikoispisteet, niiden laatu ja residyt erikoispisteissä funktioille

a) $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2(z+1)}$.

b) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1} + 4z$.

c) $f(z) = \cos\left(1 - \frac{1}{z}\right)$. Tässä on hyödyllistä miettiä, miten funktio käyttäytyy navan ympäristössä. Mitä arvoja funktio saa, kun lähestytään napaa?

2. a) Tutki funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + k^2}$$

napojen sijaintia parametrin $k \in \mathbb{R}$ eri arvoilla. Määrää yksikköympyrän sisällä olevien napojen lukumäärä eri k :n arvoilla.

b) Määrää residyt navoissa a)-kohdan funktiolle.

3. Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx.$$

4. Laske residylaskun avulla analogisen suodattimen $H(f)$, jolle $|H(f)|^2 = \frac{9}{f^4+10f^2+9}$, ekvivalentti kaistanleveys

$$W_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2|H(0)|^2}.$$

5. Laske residylaskun avulla integraali

$$\int_C f(z) dz,$$

kun C on ympyrä $|z| = 1$ vastapäivään kierrettynä ja

a)

$$f(z) = z \cdot e^{3z}.$$

b)

$$f(z) = z \cdot e^{3/z}.$$

6. Laske funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Fourier-muunnos $F(a)$ tarkastelemalla ensin tapausta $a < 0$. Käytä f :n parillisuutta tapauksessa $a > 0$.