Kompleksianalyysi, syksy 2020

Harjoitus 5, ratkaisut

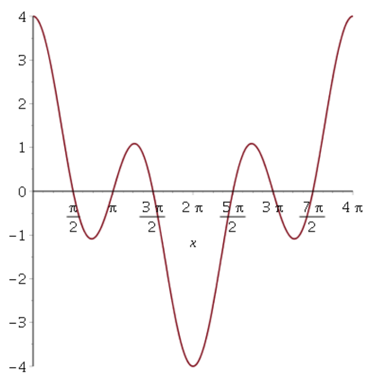
Harjoitustehtävät

1. Nyt $\lim_{n\to 0} \mathrm{Re}\; z_n = 2$ ja $\lim_{n\to 0} |\mathrm{Im}\; z_n| = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2} = 0$, joten $\lim_{n\to 0} \mathrm{Im}\; z_n = 0$ ja edelleen $\lim_{n\to 0} z_n = 2$.

   Luvun z_n argumentin pääarvo $\mathrm{Arg}\; z_n = \begin{cases} -\arctan(\frac{1}{2n^2}), & n = 1, 3, 5, \ldots \\ \arctan(\frac{1}{2n^2}), & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$.

   Nyt $\lim_{n\to 0} \mathrm{Arg}\; z_n = -\arctan(0) = 0$, kun n on pariton ja $\lim_{n\to 0} \mathrm{Arg}\; z_n = \arctan(0) = 0$, kun n on parillinen, joten jokaiselle ϵ voidaan löytää sellainen n, että $|\mathrm{Arg} z - \mathrm{Arg} z_n| < \epsilon$. (Parittomien n:n arvojen mukainen jono lähestyy 0:aa negatiiviselta puolelta ja parillisten positiiviselta puolelta). Luentoesimerkissä raja-arvoa ei ollut, koska lähestyttävä piste oli eri parillisille ja parittomille n:n arvoille.

2. a) Sijoittamalla $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ geometrisen summan kaavaan
$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$
saadaan
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+2\delta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+3\delta)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\delta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta/2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)}, \end{aligned}$$
joten
$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + 3\delta/2)}\right) = \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)} \cos(\omega t + 3\delta/2).$$
Merkitään
$$R(\delta) = \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)}, \tag{1}$$
jolloin amplitudi on
$$A(\delta) = |R(\delta)| \tag{2}$$
Amplitudin maksimiarvo voidaan katsoa vaikkapa funktion $R(\delta)$ kuvaajasta, josta nähdään, että maksimi on 4 ja se saavutetaan, kun viive on $\delta = 0$. Tässä arvo nollassa voidaan laskea raja-arvona $\delta \to 0$. Toinen tapa on erottaa tapaukset $\delta = 0$ ja $\delta \neq 0$. Kun $\delta = 0$, niin
$$f(t) = \mathrm{Re}\, 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 4\cos(\omega t).$$
Tapaus $\delta \neq 0$ on käsitelty edellä.



Kuva 1: Funktion $R(\delta)$ kuvaaja yhden jakson yli, josta nähdään, että amplitudin maksimi on 4.

Ääriarvo voidaan laskea myös normaalilla ääriarvotarkastelulla. Käyttämällä kaksinkertaisen kulman kaavoja saadaan

$$\begin{aligned} R(\delta) &= \frac{2\sin(\delta)\cos(\delta)}{\sin(\delta/2)} = \frac{4\sin(\delta/2)\cos(\delta/2)(2\cos^2(\delta/2)-1)}{\sin(\delta/2)} \\ &= 4\cos(\delta/2)(2\cos^2(\delta/2)-1), \quad \delta \neq k\pi. \end{aligned}$$

Jos yllä merkitään $y = \cos(\delta/2)$ ja tarkastellaan ääriarvoja välillä $[0,1]$, nähdään, että maksimiarvo on 4 ja se saavutetaan, kun $y = \cos(\delta/2) = 1$, eli kun $\delta = 0$.
Kuvasta 1 näkyy, että funktio $R(\delta)$ saa myös negatiivisia arvoja. Koska amplitudi on funktion $R(\delta)$ itseisarvo, nähdään, että vaihekulma ϕ riippuu funktion $R(\delta)$ merkistä. Kun $R(\delta) < 0$, niin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(t) = R(\delta)\cos(\omega t + 3\delta/2) = -|A(\delta)|\cos(\omega t + 3\delta/2) = |A(\delta)|\cos(\omega t + 3\delta/2 + \pi),$$

sillä $-\cos(x) = \cos(x+\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämän perusteella $f(t)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(t) = A(\delta)\cos(\omega t + \phi),$$

missä

$$\phi = \phi(\delta) = \begin{cases} \frac{3\delta}{2}, & \text{kun } R(\delta) \geq 0, \\ \frac{3\delta}{2} + \pi, & \text{kun } R(\delta) < 0, \end{cases}$$

sekä R ja A on määritelty kaavoilla (1) ja (2).

b) Olkoon nyt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega t + \delta_k)$$

edellyttäen, että sarja suppenee. Jos $|A_k| \leq Ck^{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$, niin sarja suppenee itseisesti, sillä

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big|A_k \cos(\omega t + \delta_k)\big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \leq C\sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} < \infty.$$

Jos taas $\alpha \leq 1$, niin yleisesti sarja ei suppene itseisesti. Esimerkiksi, kun $\delta_k = k2\pi$ ja $A_k = k^{-\alpha}$, niin

$$f(t) = \cos(\omega t)\sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} = \infty, \quad \alpha \leq 1.$$

3. a) Tämän voi laskea kahdella eri tavalla.
Tapa 1: Geometrisen sarjan summakaavan

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k, \quad |w| < 1,$$

avulla saadaan

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k, \quad |-z| = |z| = |z-0| < 1.$$

Tästä nähdään, että suppenemissäde on 1.
Tapa 2: Koska f on analyyttinen origossa saadaan

$$f'(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3} = \frac{2(-1)^2}{(1+z)^3}, \ldots, f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}}$$

ja edelleen sijoittamalla $z = 0$ saadaan Taylorin sarjaksi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k,$$

eli saatiin sama tulos kuin ensimmäisellä tavalla kuten pitääkin. Suppenemissäde on selvästi 1, sillä z^k:n kertoimen itseisarvo on aina vakio 1 kaikilla k. Siten suppenemiskiekko on yksikkökiekko $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

b) Nyt meillä pitäisi löytää sarjakehitelmä

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\mathrm{i})}{k!}(z-\mathrm{i})^k$$

pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ ympäristössä. Sovelletaan a)-kohdassa esitettyä geometrista sarjaa hyödyntävää ratkaisutapaa. Sitä varten pyritään saamaan funktion f nimittäjään tekijä $z - i$. Sitä varten kirjoitetaan

$$f(z) = \frac{1}{1+\mathrm{i}+(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}},$$

jonka jälkimmäinen tekijä on geometrisen sarjan muotoa

$$\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}} = \frac{1}{1-w}, \quad \text{missä} \quad w = -\frac{z-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1}{1+\mathrm{i}} \cdot (z-\mathrm{i}).$$

Niinpä geometrisen sarjan summakaavasta saadaan

$$f(z) = \frac{1}{1+\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+\mathrm{i})^k}(z-\mathrm{i})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+\mathrm{i})^{k+1}}(z-\mathrm{i})^k.$$

Summakaavan sivutuotteena saadaan myös suppenemissäde $R = \sqrt{2}$, sillä

$$|w| = \left|\frac{-(z-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right| = \frac{|z-\mathrm{i}|}{\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow |z-\mathrm{i}| < \sqrt{2}.$$

Saman asian voi perustella myös geometrisesti, sillä pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ etäisyys ”pahasta pisteestä”, eli nimittäjän nollakohdasta $z = -1$ on $\sqrt{2}$, minkä mukaan $z_0 = \mathrm{i}$ keskipisteenä voidaan piirtää korkeintaan säteen $R = \sqrt{2}$ kiekko, joka ei sisällä yhtään ”pahaa pistettä”. Siten suppenemiskiekko on $\sqrt{2}$-säteinen i-keskinen kiekko $\mathbb{D}(\mathrm{i}, \sqrt{2}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\mathrm{i}| < \sqrt{2}\}$.
Samaan lopputulokseen päädyttäisiin myös derivoimalla. Itse asiassa a)-kohdassa derivaatat on jo laskettu valmiiksi ja ei tarvitse muuta kuin sijoittaa $z_0 = \mathrm{i}$ derivaatan lausekkeeseen z:n paikalle ja menetellä muutoin kuin a)-kohdan tavassa 2. Mutta suppenemissäde pitäisi laskea erikseen.

c) Merkitään a)-kohdan funktiota $g(z) = \frac{1}{1+z}$. Derivoimalla termeittäin a)-kohdan sarjaesitys saadaan

$$g'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k z^{k-1},$$

sillä sarjan ensimmäinen termi on vakio 1 ja vakion derivaatta on nolla.
Annetun funktion sarjakehitelmä on siten

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2} = (-z) \cdot \frac{-1}{(z+1)^2} = (-z)g'(z) = -z \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1} z^k.$$

4. a) Käytetään geometrisen sarjan summakaavaa ja kirjoitetaan $H(z)$ muodossa

$$H(z) = \frac{1}{z(1+z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

Tehdään indeksinvaihto $n - 1 = -k$, jolloin siirtofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{1} (-1)^{k-1} z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n},$$

josta voidaan lukea impulssivaste

$$h(n) = \begin{cases} (-1)^{n-1}, & \text{kun } n = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

b) Kun $|z| > 1$, on $|z^{-1}| < 1$. Kehitetään nyt $H(z)$ z:n negatiivisten potenssien mukaan eteneväksi sarjaksi seuraavasti

$$H(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(-z^{-1})} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-1})^k = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-(k+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n},$$

josta voidaan lukea impulssivaste

$$h(n) = \begin{cases} (-1)^{n+2}, & \text{kun } n = 2, 3, 4, \ldots, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

5. Jaetaan nimittäjä tekijöihin $z^2 + 4z + 3 = (z+1)(z+3)$ ja tehdään OMK:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3} = \frac{(A+B)z + 3A + B}{(z+1)(z+3)}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

eli

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)$$

a) Koska $|z| < 1$, niin

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^k z^k.$$

Vastaavasti

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+z/3} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-(-z/3)} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} z^k.$$

Laskemalla yhteen edellä saadut sarjat saadaan Laurentin sarjaksi

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < 1,$$

missä

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^k \left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right), & \text{kun } k \geq 0, \\ 0, & \text{kun } k < 0. \end{cases}$$

Koska sarja sisältää ainoastaan ei-negatiivisia z:n potensseja, on saatu Laurentin sarja samalla myös Taylorin sarja.

b) Kun $0 < |z+1| < 2$, niin kehitetään funktio sarjaksi termin $z+1$ suhteen. Osamurtokehitelmästä saatu ensimmäinen termi on jo valmiiksi oikeaa muotoa, joten riittää tarkastella toista termiä. Toista termiä voidaan muokata seuraavasti

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+(z+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z+1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (z+1)^k.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa geometrisen sarjan summakaavan käyttö oli luvallista, sillä

$$|z+1| < 2 \Rightarrow \left| -\frac{z+1}{2} \right| < 1.$$

Yhdistämällä termit saadaan Laurentin sarjaksi

$$f(z) = \frac{1}{2}(z+1)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} (z+1)^k, \quad 0 < |z+1| < 2.$$

c) Kun $|z| > 3$, niin erityisesti $|z| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$. Kehitetään osamurtokehitelmästä saadut termit z:n negatiivisten potenssien mukaan eteneviksi sarjoiksi. Ensimmäistä termiä voidaan muokata seuraavasti

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-(-z^{-1})} = \frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^k z^{-(k+1)}$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^{l-1}z^{-l}.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa tehtiin indeksinvaihto $k+1=l$.
Toisessa termissä huomioidaan, että kun $|z| > 3$, niin $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$. Siten toinenkin termi kehitetään negatiivisten potenssien mukaan eteneväksi sarjaksi seuraavalla tavalla

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1-(-3/z)} = \frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}}{2}z^{-k}.$$

Yhdistämällä edellä saadut summat saadaan

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left((-1)^{k-1}-(-3)^{k-1}\right)z^{-k} = \sum_{k=2}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}(-1)^{k-1}\left(1-3^{k-1}\right)}_{=a_{-k}}z^{-k}, \quad |z| > 3.$$