

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 5, syksy 2020

Esitettävä löytyy Moodlesta. Suositellaan laskettavaksi tehtävät 3 ja 4.

1. Tutki, onko jonolla

$$z_n = 2 + i \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

raja-arvoa $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Onko luvun z_n argumentin pääarvolla raja-arvoa, kun $n \rightarrow \infty$? Vertaa tulosta luentoviikon 5 Esimerkkiin 1.

2. Tarkastellaan samalla taajuudella, mutta eri vaiheessa värähtelevien kosiniaaltojen summaa

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t) + A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + \dots + A_N \cos(\omega t + \delta_N). \quad (1)$$

- a) Viiveen kontrollointi on tärkeää esimerkiksi akustiikassa. Oletetaan, että

$$N = 3, \quad A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 1 \quad \text{ja} \quad \delta_k = k\delta, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kirjoita summa muodossa $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ ja laske summan amplitudi A ja vaihekulma ϕ . Mikä on amplitudin A maksimiarvo ja millä viiveen δ arvolla se saavutetaan?

Vihje: Käytä hyväksi esitystä

$$f(t) = \operatorname{Re} \left(e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \delta)} + e^{i(\omega t + 2\delta)} + e^{i(\omega t + 3\delta)} \right)$$

ja käytä geometrisen summan kaavaa.

- b) Oletetaan, että amplitudit vaimenevat lain $|A_k| \leq Ck^{-\alpha}$ mukaisesti. Millä parametrin α arvolla esityksestä (1) saatava sarja, kun $N \rightarrow \infty$, suppenee itseisesti?

3. Laske funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

Taylorin sarjan pisteen

- a) $z_0 = 0$,
b) $z_0 = i$

ympäristössä. Määrää myös sarjojen suppenemiskiekkko.

- c) Taylorin sarja voidaan derivoida termeittäin suppenemiskiekossaan. Käytä hyväksi a)-kohdan sarjaesitystä ja määrää sen avulla funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$$

Taylorin sarja pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä.

4. Laske LTI-systeemin, jonka siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1}{z+z^2},$$

impulssivaste, kun H :ta tarkastellaan alueessa

- a) $0 < |z| < 1$.
b) $|z| > 1$.

5. Laske funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}$$

Laurentin sarja alueessa

- a) $|z| < 1$. Mikä on funktion $f(z)$ Taylorin sarja pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä?
- b) $0 < |z + 1| < 2$.
- c) $|z| > 3$.