Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 26.10.2020 ratkaisuineen

1. a) Laske funktion

$$f(z) = \frac{1}{z + \mathrm{i}}$$

Taylorin sarja pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ ympäristössä. Mikä on sarjan suppenemissäde?

b) Onko funktiolla

$$f(z) = \frac{2\mathrm{i}}{z^2 + 1}$$

Taylorin sarjaa pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ ympäristössä? Jos ei, niin määrää funktion Laurentin sarja pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ suhteen.

2. a) Laske residylaskun avulla integraali

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(1+z)^3}{z^2} \mathrm{d}z,$$

missä C on mikä tahansa origon vastapäivään kiertävä Jordan-käyrä. (4p)

b) Mikä yhteys integraalilla

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

on binomikertoimeen $\binom{n}{k}$? **Vihje:** Binomikaava (2p)

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k.$$

3. Erään kausaalisen digitaalisen suodattimen siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{2z}{3z - 1}.$$

a) Laske suodattimen impulssivaste. (3p)

b) Määrää suodattimen amplitudivaste $\left|\mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\right|$. Mitä suodatin tekee suurille (normalisoiduille) taajuuksille $\omega \approx \pi$? (4p)

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

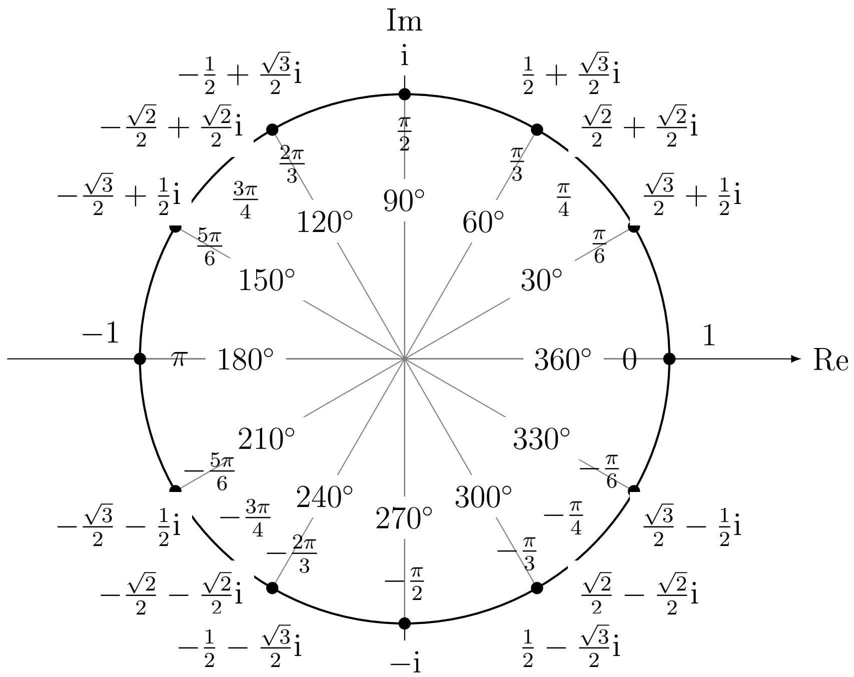
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Funktio on analyyttinen kaikkialla muualla paitsi nimittäjän nollakohdassa $z = -\mathrm{i}$. Näin ollen funktiolla on Taylorin sarja pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ ympäristössä. Koska pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ etäisyys pisteestä $-\mathrm{i}$ on 2, on Taylorin sarjan suppenemissäde $R = 2$.
Geometrisen sarjan summakaavan

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}, \quad |w| < 1,$$

avulla saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i} + (z-\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\left(-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)}_{=w}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^k (z-\mathrm{i})^k \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k (z-\mathrm{i})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (z-\mathrm{i})^k, \quad |z-\mathrm{i}| < 2. \end{aligned}$$

b) Funktiolla f on 1. kertaluvun napa nimittäjän nollakohdissa $z = \pm\mathrm{i}$, joten f ei ole analyyttinen pisteessä $z_0 = \mathrm{i}$. Siten sillä ei ole Taylorin sarjaa pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ ympäristössä. Mutta sillä on Laurentin sarjan pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ aidossa ympäristössä $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$, sillä pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ etäisyys toisesta "pahasta pisteestä" $z = -\mathrm{i}$ on 2.
Kohdasta a) saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k (z-\mathrm{i})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k (z-\mathrm{i})^{k-1} \overset{\text{sij. } k-1=n}{=} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1} (z-\mathrm{i})^n. \end{aligned}$$

2. a) Integrandilla

$$f(z) := \frac{(1+z)^3}{z^2}$$

on toisen kertaluvun napa origossa, joten residylaskun mukaan integraali on

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(1+z)^3}{z^2} \mathrm{d}z = \mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 0} 3(z+1)^2 = 3.$$

b) Koska

$$\int_C z^k \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & k = -1, \\ 0, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \end{cases}$$

on integroinnin kannalta ainoastaan potenssilla z^{-1} merkitystä. Vihjeen mukaan osoittaja voidaan purkaa z:n potensseiksi, jolloin ainoastaan termi $\binom{n}{k} z^k$ "jää henkiin" integroitaessa. Siten kysytty integraali on $\binom{n}{k}$. Esimerkiksi a)-kohdassa $n = 3$ ja $k = 1$, joten soveltamalla tulosta a)-kohtaan saadaan a)-kohdan integraaliksi $\binom{3}{1} = 3$.

3. a) Kausaalisen suodattimen impulssivaste $(h(n))_{n=0}^{\infty}$ löydetään laskemalla siirtofunktiolle Laurentin sarja

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}.$$

Tämä taasen löydetään vaikkapa geometrisen sarjan summakaavan avulla seuraavasti

$$\mathbf{H}(z) = \frac{2z}{3z-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} \cdot z^{-n}.$$

Impulssivaste on siis $h(n) = 2/3^{n+1}$.

b) Koska osamäärän itseisarvo on itseisarvojen osamäärä, saadaan Eulerin kaavan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} = \cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega$ mukaan amplitudivasteeksi

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{H}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right)\right| &= \frac{|2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}|}{|3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-1|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(3\cos\omega-1)^2+(3\sin\omega)^2}} = \frac{2}{\sqrt{9\cos^2\omega-6\cos\omega+1+9\sin^2\omega}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{10-6\cos\omega}}.\end{aligned}$$

Kun $\omega \approx \pi$, on

$$\left|\mathbf{H}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right)\right| \approx \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2},$$

joten suodatin vaimentaa kulmataajuuden $\omega = \pi$ taajuuskomponentteja kertoimella puoli.