Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

1. välikoe 5.10.2020 ratkaisuineen

1. Esitä seuraava kompleksiluku z perusmuodossa $z = x + \mathrm{i}y$ sekä määrää luvun z itseisarvo ja argumentin pääarvo, kun

   a)
   $$z = \frac{\mathrm{i}}{2 - 2\mathrm{i}},$$

   b)
   $$z = (\sqrt{3} - \mathrm{i})^3.$$

2. Tarkastellaan funktiota $f(z) = z^2$ ja Kuvan 1 mukaista ”Pac-Man”:ia, joka vastaa kompleksitason aluetta

   $$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z| < 1 \text{ ja } \operatorname{Arg}(z) \notin \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \right] \right\}.$$

   a) Määrää kuvapisteen $f(z)$ eksponenttiesitys jokaisella $z \in A$. (2p)

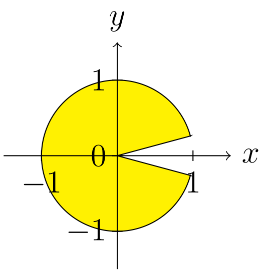
   b) Määrää ”Pac-Man”:n kuvajoukko funktiolle f. Piirrä joukon $f(A)$ kuva. (4p)

3. Olkoon C suljettu käyrä, joka koostuu kahdesta osasta C_1 ja C_2. Käyrä C_1 on oikeassa puolitasossa oleva yksikköympyrän kaari ja C_2 on imaginaariakselin jana pisteestä $-\mathrm{i}$ pisteeseen i. Katso Kuva 2.

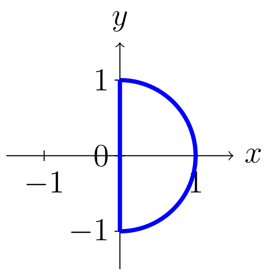
   a) Muodosta käyrille C_1 ja C_2 sopivat parametriesitykset, kun C kierretään vastapäivään. (2p)

   b) Laske integraali (4p)

   $$\int_C |z| \mathrm{d}z.$$



Kuva 1: Tehtävän 2 ”Pac-Man”



Kuva 2: Tehtävän 3 käyrä C

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

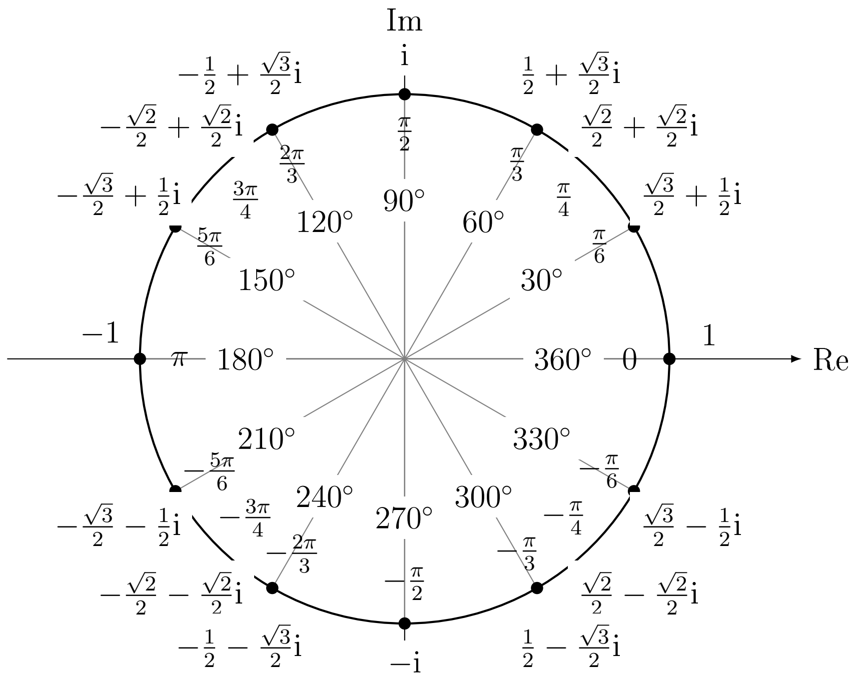
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. Käytetään hyväksi kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ eksponenttiesitystä $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, missä $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\varphi = \arg(z)$.

   a) Koska osamäärän itseisarvo on itseisarvojen osamäärä ja osamäärän argumentti on argumenttien erotus, saadaan

   $$|z| = \left|\frac{\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}\right| = \frac{|\mathrm{i}|}{|2-2\mathrm{i}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

   ja, kun argumenttien haarat on valittu oikein (lopputuloksen argumentin pitää olla välillä $(-\pi, \pi]$),

   $$\mathrm{Arg}(z) = \arg(\mathrm{i}) - \arg(2-2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

   Edellisten tulosten ja yksikköympyrän mukaan

   $$z = |z|e^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(z)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}.$$

   b) Lasketaan ensin kantaluvun eksponenttiesitys

   $$\sqrt{3} - \mathrm{i} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}e^{\arg(\sqrt{3}-\mathrm{i})} = 2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

   Edellisen perusteella $z^3 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^3 = 2^3e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$, joten

   $$z = -8\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad |z| = 8 \quad \text{ja} \quad \mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. a) Olkoon $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ argumentin eksponenttiesitys, jolloin kuvapisteen eksponenttiesitys on $w \overset{\text{merk.}}{=} f(z) = z^2 = r^2e^{\mathrm{i}(2\varphi + k\cdot 2\pi)}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Tässä k:ta tullaan tarvitsemaan b)-kohdassa.

   b) Edellisen kohdan perusteella joukko A voidaan ilmaista napakoordinaatteja r ja φ koskevina ehtoina $0 < r < 1$ ja $\frac{\pi}{12} < |\varphi| \leq \pi$. Tällöin $0 < r^2 < 1$ ja $\frac{\pi}{6} < |2\varphi| \leq 2\pi$. Saadaan 3 eri tapausta:
   1° $\frac{\pi}{6} < |2\varphi| \leq \pi$, jolloin $\mathrm{Arg}(f(z)) \in (-\pi, -\frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}, \pi]$.
   2° $-2\pi \leq 2\varphi < -\pi$, jolloin $\mathrm{Arg}(f(z)) = 2\varphi + 2\pi \in [0, \pi)$.
   3° $\pi < 2\varphi \leq 2\pi$, jolloin $\mathrm{Arg}(f(z)) = 2\varphi - 2\pi \in (-\pi, 0]$.
   Edellisen perusteella nähdään, että $f(z)$ saa yksikkökiekon $\mathbb{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kaikki arvot origoa lukuun ottamatta ja vieläpä niin, että arvot w, joille $\frac{\pi}{6} < |\mathrm{Arg}(w)| \leq \pi$, saadaan kahteen kertaan ja arvot w, joille $\mathrm{Arg}(w) \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ saadaan kertaalleen.
   Kuvajoukko on siis "punkteerattu" yksikkökiekko $\mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$, eli "Pac-Man:n suu menee kiinni". Huomautettakoon, että argumentin pääarvon käyttäminen ei ole välttämätöntä, vaan valitsemalla $\varphi = \arg(z)$ väliltä $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right)$ päädytään samaan lopputulokseen yksinkertaisemmin.
   Jätetään piirros tästä väliin.

3. a) Sopivat parametriesitykset ovat $C_1 : z(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, ja $C_2 : z(t) = -t\mathrm{i}$, $-1 \leq t \leq 1$.

b) Integraali voidaan hajottaa kahteen osaan

$$\int_C |z| \mathrm{d}z = \int_{C_1} |z| \mathrm{d}z + \int_{C_2} |z| \mathrm{d}z.$$

Kompleksisen käyräintegraalin määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
\int_C |z| \mathrm{d}z &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |z(\varphi)| z'(\varphi) \mathrm{d}\varphi + \int_{-1}^{1} |z(t)| z'(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi + \int_{-1}^{1} -\mathrm{i}|t| \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{i}t^2 \Big|_{t=0}^{1} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} - \mathrm{i} \\
&= \mathrm{i}.
\end{aligned}$$