Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 28.11.2019

1. Ratkaise yhtälöt

   a)
   $$|z| = |z - 2\mathrm{i}|,$$
   b)
   $$\mathrm{Re}(z^2) = 0.$$

   Piirrä ratkaisujoukkojen kuvat.

2. Määrää funktion $f(z) = z^2$ kuvajoukko xy-tason kolmiolle, jonka kärkipisteet ovat $(0,0), (0,1)$ ja $(1,0)$. Tarkastele kolmion sivujen kuvautumista. Kolmion hypotenuusalle kannattaa käyttää parametrisointia $x = \frac{t+1}{2}$, $t \in [-1,1]$. Piirrä kolmion kuvajoukko.

3. a) Määrää funktion
   $$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}$$
   erikoispisteet ja niiden laatu.

   b) Laske residylaskun avulla integraali
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} \mathrm{d}x.$$

4. Tarkastellaan digitaalista kausaalista LTI–systeemiä, jonka impulssivaste on Fibonaccin lukujono $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$. Systeemin toiminnan määrää täysin differenssiyhtälö
   $$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n), \tag{1}$$
   missä $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ on systeemin heräte ja $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ on sitä vastaava systeemin vaste.

   a) Määrää systeemin siirtofunktio soveltamalla Z-muunnosta yhtälöön (1).

   b) Onko systeemi stabiili?

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad z_k = |w|^{1/n} e^{i(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-i\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-i\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z) z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} dz$$

Yksikköympyrä