

Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 24.8.2019

1. Tarkastellaan alueen $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ kuvautumista eri kompleksifunktioille $f(z)$.

a) Ilmoita alue D napakoordinaattien avulla. (2p)

b) Piirrä alueen D kuvajoukko, kun (4p)

(i) $f(z) = \frac{1}{z}$.

(ii) $f(z) = \text{Log}(z)$.

2. Tutki Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla, missä pisteissä $z = x + iy \in \mathbb{C}$ seuraavilla funktioilla $f(z)$ on derivaatta:

a) $f(z) = 2x + y + i(2y - x)$.

b) $f(z) = y^2 - ix^2$.

Missä pisteissä edellä olevat funktiot ovat analyyttisiä?

3. Laske residylaskun avulla integraali

$$\int_C \frac{z^5}{1 - z^3} dz,$$

kun C on

a) ympyrä $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ vastapäivään kierrettynä. (4p)

b) joukon

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 2, x > 0\}$$

reuna vastapäivään kierrettynä. (2p)

4. Erään kausaalisen LTI-systeemin impulssivaste on jono $(h(n))_{n=0}^{\infty}$, jolle

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 0, \\ 2, & \text{kun } n = 1, \\ 1, & \text{kun } n = 2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määrä systemin amplitudivaste ja vaihevaste.