Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 28.10.2019

1. Laske Taylorin sarja pisteessä $z_0 = 1$ funktioille

   a)
   $$f(z) = \frac{1}{z},$$

   b)
   $$f(z) = \frac{2}{2z - z^2}.$$

   Mikä on sarjojen suppenemissäde?

2. a) Määrää funktion
   $$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$$
   erikoispisteet ja niiden laatu.

   b) Laske residylaskun avulla integraali
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4} \mathrm{d}x.$$

3. Tarkastellaan erään digitaalisen kausaalisen IIR-suodattimen määräämää LTI–systeemiä, jonka impulssivaste on jono $(h(n))_{n=0}^{\infty}$, jolle
   $$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{kun } n = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{kun } n \geq 1. \end{cases}$$

   a) Määrää systeemin siirtofunktio.

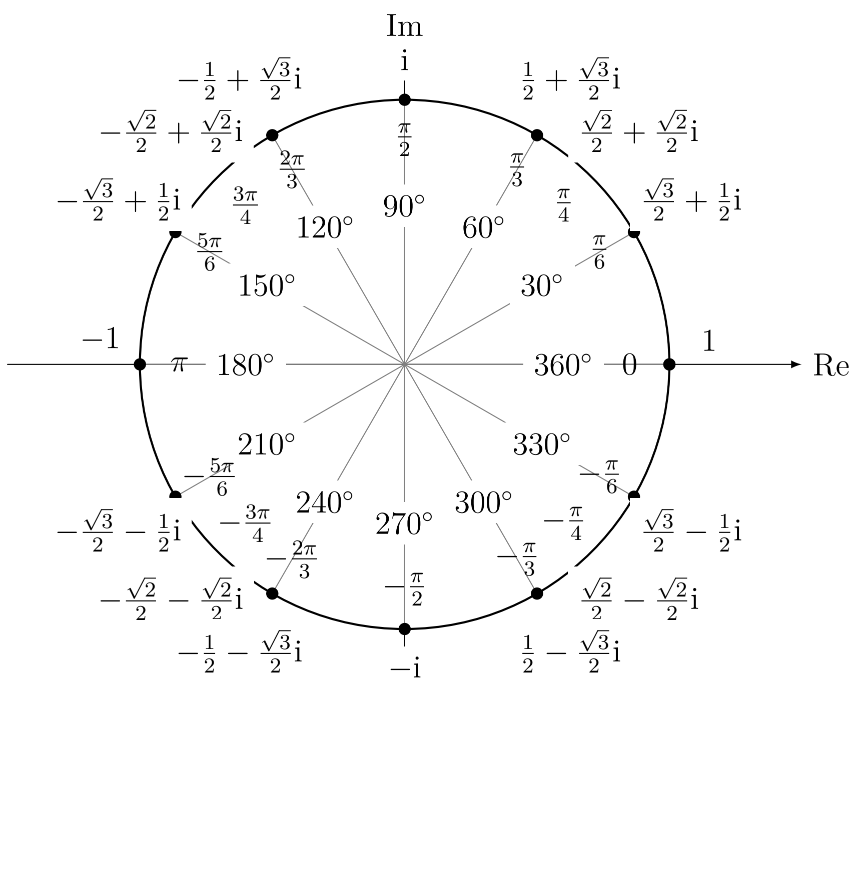
   b) Laske systeemin vaste herätteelle $(x(n))_{n=0}^{\infty}$, jolle
   $$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{kun } n = 1, \\ 0, & \text{kun } n \geq 2. \end{cases}$$

   Onko systeemi stabiili?

Koekaavat

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} & \cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \\
e^{z} &= e^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) & e^{\mathrm{i}z} &= \cos z + \mathrm{i}\sin z \\
\sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 & \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] & \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \\
\log z &= \ln|z| + \mathrm{i}\arg z & z_k &= |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n} \\
f(z) &= f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
\sum_{k=0}^{\infty} z^{k} &= \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 & \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} &= \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n & f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\
a_n &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & a_n &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \\
f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z & a_{-1} &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0} \\
X(\omega) &= \sum_{n} x(n) e^{-\mathrm{i}\omega n} & \mathbf{X}(z) &= \sum_{n} x(n) z^{-n} \\
x(n-k) &\leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} & x(n-k) &\leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k} \\
Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) & \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z) \\
\mathbf{H}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} & h(k) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) **I tapa:** Lasketaan derivaattoja

$$f'(z) = -z^{-2},\ f''(z) = 2z^{-3},\ f'''(z) = -2\cdot 3z^{-4},\ \ldots,\ f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)},$$

joten

$$f'(1) = -1^{-2} = -1,\ f''(z) = 2\cdot 1^{-3} = 2,\ f'''(z) = -2\cdot 3,\ \ldots,\ f^{(n)}(z) = (-1)^n n!.$$

Edellisen perusteella Taylorin sarja on

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n. \tag{1}$$

II tapa: Käytetään geometrisen sarjan summakaavaa

$$f(z) = \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{1-(-(z-1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Geometrisen sarjan suppenemiskriteerin nojalla Taylorin sarja suppenee, kun $|z-1|<1$, joten suppenemissäde on 1.

b) **I tapa:** Käytetään osamurtokehitelmää (OMK), jonka mukaan

$$f(z) = \frac{2}{z(2-z)} \overset{\text{OMK}}{=} \frac{1}{z} + \frac{1}{2-z}.$$

Oikean puolen ensimmäinen termi käsiteltiin jo a)-kohdassa. Jälkimmäisestä saadaan geometrisen sarjan summakaavalla

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n, \quad |z-1|<1. \tag{2}$$

Yhdistämällä (1) ja (2) saadaan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2(z-1)^{2k}, \quad |z-1|<1.$$

Geometrisen sarjan suppenemiskriteerin nojalla suppenemissäde on tässäkin kohdassa 1.

II tapa: Neliöidään nimittäjässä oleva termi, jolloin geometrisen sarjan summakaavan nojalla

$$f(z) = \frac{2}{1-1+2z-z^2} = 2\frac{1}{1-(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(z-1)^{2n}, \quad |z-1|<1.$$

2. a) Supistetussa muodossa olevan rationaalifunktion erikoispisteet ovat nimittäjän nollakohdat, jotka ovat napoja. Kaavakokoelman mukaan

$$z^4+4=0 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} \overset{\text{merk.}}{=} z_k, \quad k=0,1,2,3.$$

Yksikköympyrästä nähdään, että

$$z_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \mathrm{i}$$

ja vastaavasti

$$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -1 + \mathrm{i}, \quad z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -1 - \mathrm{i} \quad \text{ja} \quad z_3 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 1 - \mathrm{i}.$$

Kaikki navat ovat yksinkertaisia.

b) Teorian mukaan integraali saadaan ylemmässä puolitasossa olevissa navoissa laskettujen residyjen avulla. Riittää siis laskea a)-kohdan funktion residyt pisteissä $z_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ ja $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. Koska navat ovat yksinkertaisia, niin kätevän laskukaavan mukaan

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{4(\sqrt{2})^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{16}z_2 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\mathrm{i}.$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4(\sqrt{2})^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}z_3 = \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\mathrm{i}.$$

Teorian mukaan Cauchyn residylauseesta seuraa, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) + \mathrm{Res}_{z=z_1} f(z)\right) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{1}{8}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. a) Siirtofunktio $\mathbf{H}(z)$ on impulssivasteen $(h(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos, joten geometrisen sarjan summakaavan nojalla

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{5} + \frac{1}{2z-1} \\ &= \frac{2z+4}{5(2z-1)}.\end{aligned} \tag{3}$$

b) Lasketaan vaste $y(n)$ Z-muunnoksen avulla, jonka mukaan $Y(z) = \mathbf{H}(z)X(z)$, missä $X(z)$ on herätteen $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos, eli

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{1}{2z}(2z-1). \tag{4}$$

Kaavojen (3) ja (4) perusteella vasteen Z-muunnos on

$$Y(z) = \mathbf{H}(z)X(z) = \frac{2z+4}{5(2z-1)}\cdot\frac{1}{2z}(2z-1) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}z^{-1},$$

joten vaste on $(y(n))_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, \dots\right)$, jolle $y(n) = 0$ kaikilla $n \geq 2$.

Systeemi on stabiili, sillä siirtofunktion ainoa napa $z = \frac{1}{2}$ on yksikköympyrän sisällä.