Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

1. välikoe 7.10.2019

1. Määrää itseisarvo ja argumentin pääarvo luvuille

   a)
   $$z = \sqrt{-1-\mathrm{i}},$$

   b)
   $$z = \operatorname{Log}(-1-\mathrm{i}).$$

2. a) Olkoot $0 < r \in \mathbb{R}$ ja $z_0 \in \mathbb{C}$ annettuja lukuja. Mitä joukko
   $$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$
   esittää geometrisesti? (1p)

   b) Määrää funktion
   $$f(z) = \frac{1}{z}$$
   kuvajoukko ympyrälle
   (i) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$. (2p)
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| = 1\}$. (3p)
   Kohdan a) joukosta voi olla hyötyä kuvajoukon määräämisessä.

3. Laske integraali
   $$\int_C \frac{4z-3}{2z^2-3z}\mathrm{d}z,$$
   kun C on ympyrä

   a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 2\}$,

   b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$

   positiiviseen kiertosuuntaan kierrettynä.

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

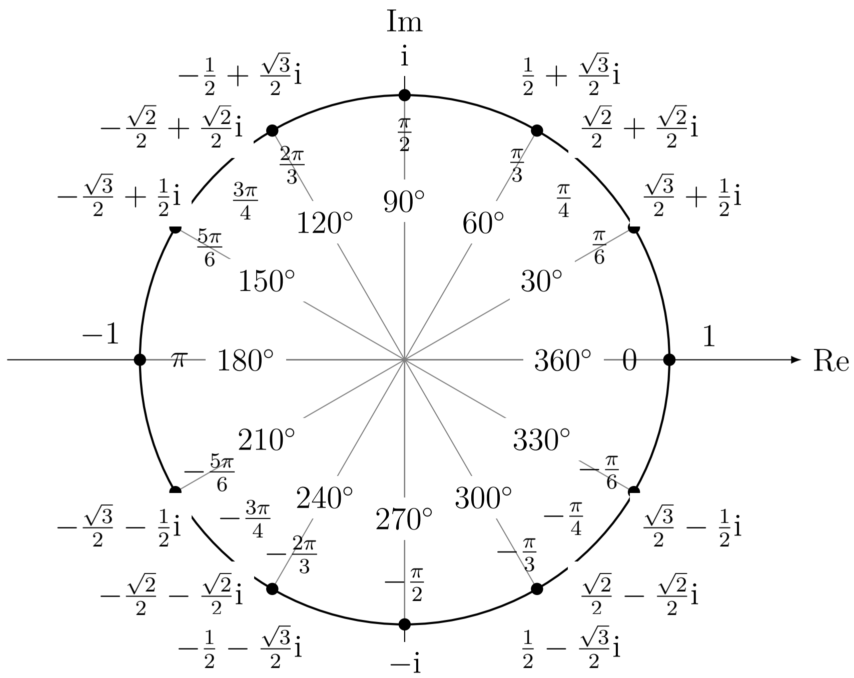
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. Lasketaan eksponenttiesitys $w = re^{i\varphi}$ luvulle $w = -1 - i$. Itseisarvoksi saadaan $r = \sqrt{2}$ ja yksikköympyrästä taasen saadaan argumentiksi

$$\varphi = \arg(w) = \operatorname{Arg}(w) + k \cdot 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Edellisen perusteella

a) $z = \sqrt{w} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}+k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$, josta nähdään itseisarvo $|z| = \sqrt[4]{2}$ ja argumentin pääarvolle $\operatorname{Arg}(z)$ löydetään kaksi arvoa, $-\frac{3\pi}{8}$ ja $\frac{5\pi}{8}$.

b) $z = \operatorname{Log}(w) = \ln|w| + i \cdot \operatorname{Arg}(w) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i$, joten itseisarvoksi ja argumentin pääarvoksi saadaan

$$|z| = \sqrt{(\ln\sqrt{2})^2 + \frac{9\pi^2}{16}} \quad \text{ja} \quad \operatorname{Arg}(z) = -\arctan\left(\frac{3\pi}{4\ln\sqrt{2}}\right),$$

missä arkustangentilla tarkoitetaan välillä $(0, \frac{\pi}{2})$ olevaa päähaaran arvoa.

2. a) Joukko esittää r-säteistä ympyrää, jonka keskipiste on z_0.

b) Merkitään $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) =: u + iv$.

(i) Kun $|z| = 1$, niin $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = 1/|z|^2 = 1$, joten kuvajoukko on yksikköympyrä uv-tasossa.

(ii) Koska joukko on nyt 1-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on $z_0 = 1$, niin a)-kohdan mukaan jokainen joukon piste voidaan kirjoittaa muodossa $z = 1 + e^{i\varphi}$, missä $\varphi \in [0, \pi)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + e^{i\varphi}} = \frac{1 + e^{-i\varphi}}{(1 + e^{i\varphi})(1 + e^{-i\varphi})} = \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{2 + 2\cos\varphi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sin\varphi}{2 + 2\cos\varphi}i. \end{aligned}$$

Kun $\varphi \in [0, 2\pi)$, niin kuvaajaa tarkastelemalla voidaan todeta, että imaginaariosa $\operatorname{Im}(f(z))$ käy läpi kaikki arvot, joten kuvajoukko on uv-tason suora $u = \frac{1}{2}$.

3. Integrandin nimittäjän nollakohdat ovat $z = 0$ ja $z = \frac{3}{2}$.

a) Molemmat nollakohdat ovat C:n sisäpuolella. Hajotetaan integrandi osamurtokehitelmällä muotoon

$$f(z) := \frac{4z - 3}{2z^2 - 3z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z - \frac{3}{2}},$$

joten Cauchyn kaavan mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_C \frac{1}{z - \frac{3}{2}}\mathrm{d}z = 2\pi i(1 + 1) = 4\pi i.$$

b) Nyt vain $z = 0$ on C:n sisäpuolella. Kirjoitetaan Cauchyn kaavan käyttöä varten f muodossa

$$f(z) = \frac{g(z)}{z}, \quad \text{missä} \quad g(z) = \frac{4z-3}{2z-3}.$$

Koska g on analyyttinen C:ssä ja sen sisäpuolella, saadaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot g(0) = 2\pi\mathrm{i}.$$

Toinen tapa on a)-kohdassa lasketun osamurtokehitelmän hyödyntäminen. Koska $z = \frac{3}{2}$ on C:n ulkopuolella, saadaan samalla tavalla kuin a)-kohdassa Cauchyn kaavan mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_C \frac{1}{z - \frac{3}{2}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(1+0) = 2\pi\mathrm{i}.$$