

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 7, syksy 2018

Lisäpistetehtävät: 1, 4 ja 6

1. Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä käytetään desimointioperaatiota $\downarrow 2$, jossa alkuperäisestä näytteistetystä signaalista poimitaan parilliset näytteet. Matemaattisesti suhteella 2 desimointi vastaa systeemiä, jonka vaste $y(n)$ määräytyy herätteestä $x(n)$ kaavalla

$$y(n) \stackrel{\text{merk.}}{=} x_{\downarrow 2}(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Määritellään jono $c_2(n)_{n=0}^{\infty}$ asettamalla

$$c_2(n) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\pi n}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Osoita, että kaikille jonoille $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ pätee tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n)c_2(2n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2}.$$

- b) Laske desimoidun signaalin Z -muunnos $X_{\downarrow 2}(z) = \mathcal{Z}(x_{\downarrow 2})(z)$ käyttämällä identiteettiä

$$x_{\downarrow 2}(n) = x(2n) = x(2n)c_2(2n)$$

ja a)-kohdan tulosta.

2. Diskreetin kausaalisen LTI-systeemin siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z}{z^2 + 7z + 12}.$$

Määrä systeemin impulssivaste käyttämällä kaavaa

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1} dz,$$

missä S_r sulkee sisäänsä kaikki $\mathbf{H}(z)$:n navat.

3. Diskreetin kausaalisen LTI-systeemin siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z}{z^2 + z + \frac{3}{16}}, \quad |z| > \frac{3}{4}.$$

Määrä systeemin impulssivaste.

4. Laske systeemin amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\theta(\omega) = \arg H(\omega)$, kun impulssivaste on $h(n) = \{1, 2, 1\}$. (Nuoli alapuolella tarkoittaa ajanhetkeä $n = 0$.)

5. Määrä amplitudivaste $|H(\omega)|$ ja vaihevaste $\theta(\omega) = \arg H(\omega)$ suodattimelle, joka määritellään differenssiyhtälöllä

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2),$$

missä $x(n)$ on heräte ja $y(n)$ on vaste. Kirjoita taajuusvastefunktiolle $H(\omega)$ esitys $H(\omega) = R(\omega)e^{i\phi(\omega)}$, missä $R(\omega)$ ja $\phi(\omega)$ ovat reaalisia. Määrä amplitudivasteen nollakohdat.

6. Tiedonkeruulaitteen eräässä osassa on äärimmäisen tärkeää, että kaikki taajuudet viivästyvät ajassa saman verran. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että taajuusvastefunktion vaihevaste on lineaarinen, eli muotoa $\alpha + \beta\omega$ joillekin reaaliluvuille α ja β . Saat valita ehdolla olevista kahdesta siirtofunktiosta

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1(z) &= -1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} + z^{-4}, \\ \mathbf{H}_2(z) &= -1 + 2z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3} + z^{-4}.\end{aligned}$$

tämän ehdon täyttävän. Perustele, kumman valitset.