

# KOMPLEKSIANALYYSI

## Harjoitus 5, syksy 2018

Lisäpistetehtävät: 2 a); 3 a) tai b) ja 4

1. Tutki, onko jonolla

$$z_n = 2 + i \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

raja-arvoa  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ . Onko luvun  $z_n$  argumentin pääarvolla raja-arvoa, kun  $n \rightarrow \infty$ ? Vertaa tulosta luentoviikon 5 Esimerkkiin 1.

2. Tarkastellaan samalla taaajuudella, mutta eri vaiheessa värähtelevien kosiniaaltojen summaa

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t) + A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + \dots + A_N \cos(\omega t + \delta_N). \quad (1)$$

- a) Viiveen kontrollointi on tärkeää esimerkiksi akustiikassa. Oletetaan, että

$$N = 3, \quad A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 1 \quad \text{ja} \quad \delta_k = k\delta, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kirjoita summa muodossa  $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  ja laske summan amplitudi  $A$  ja vaihekulma  $\phi$ . Mikä on amplitudin  $A$  maksimiarvo ja millä viiveen  $\delta$  arvolla se saavutetaan?

**Vihje:** Käytä hyväksi esitystä

$$f(t) = \operatorname{Re} \left( e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \delta)} + e^{i(\omega t + 2\delta)} + e^{i(\omega t + 3\delta)} \right)$$

ja käytä geometrisen summan kaavaa.

- b) Oletetaan, että amplitudit vaimenevat lain  $|A_k| \leq Ck^{-\alpha}$  mukaisesti. Millä parametrin  $\alpha$  arvolla esityksestä (1) saatava sarja, kun  $N \rightarrow \infty$ , suppenee itseisesti?
3. Laske funktion  $f(z) = 1/z$  Taylorin sarja pisteen  $z_0 = 2$  ympäristössä
- a) käyttämällä geometrista sarjaa.
- b) luentoviikon 5 Lausetta 4.

Mikä on sarjan suppenemissäde? Laske  $f^{(2018)}(2)$ .

4. Laske LTI-systeemin, jonka siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1}{z + z^3},$$

impulssivaste, kun  $H$ :ta tarkastellaan alueessa

- a)  $0 < |z| < 1$ .
- b)  $|z| > 1$ .

**Vihje:** Kannattaa käyttää geometrisen sarjan summakaavaa funktiolle

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

5. Laske funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}$$

Laurentin sarja alueessa

- a)  $1 < |z| < 3$ .
- b)  $|z| > 3$ .
- c)  $|z| < 1$ .