

# KOMPLEKSIANALYYSI

## Harjoitus 4, syksy 2018

Lisäpistetehtävät: 1; 4 b), c) ja 6

1. Laske käyräintegraali

$$\int_C f(z)dz,$$

kun

- a)  $f(z) = z^2$  ja  $C$  on polku  $z(t) = t^2 + it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  
b)  $f(z) = |z|$  ja  $C$  on polku  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , jolle  $C_1 : z(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  
 $C_2 : z(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ , ja  $C_3 : z(t) = i(1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Piirrä polku  $C$  kummassakin kohdassa.

2. Laske  $\int_C f(z)dz$ , kun  $C$  on ympyrä  $|z - 1| = 1$  ja

- a)  $f(z) = \bar{z}^2$ .  
b)  $f(z) = z^2$ .

Onko funktiolla  $f$  olemassa integraalifunktiota kummassakaan tapauksessa? Jos on, niin laske integraali integraalifunktion avulla.

3. Laske  $\int_C f(z)dz$  funktiolle  $f(z) = z^i$  haaralle

$$z^i = \exp(i \operatorname{Log} z), \quad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi,$$

kun  $C$  on puoliympyrä  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

4. Laske  $\int_C f(z)dz$ , kun  $C$  on rajoitetun alueen, jonka rajaavat suorat  $x = \pm 2$  ja  $y = \pm 2$  (tässä merkintä  $\pm$  tarkoittaa, että valitaan jompi kumpi merkeistä), positiivisesti suunnistettu reuna, ja

a)

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2}i},$$

b)

$$f(z) = \frac{z}{2z + 1},$$

c)

$$f(z) = \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)}.$$

Piirrä polku  $C$ .

5. Laske (yksi kierros positiiviseen suuntaan)

$$\int_{|z|=2} \frac{4z \sin z}{z^2 + 2iz + 3} dz.$$

Anna vastaus muodossa  $a + ib$ .

6. Laske  $\int_C \frac{e^{2z}}{z^3} dz$ , kun  $C$  on positiivisesti suunnistettu neliö, jonka kärkipisteet ovat  $-1 - i$ ,  $1 - i$ ,  $1 + i$  ja  $-1 + i$ .