KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 3, syksy 2018

Lisäpistetehtävät: 1, 2 ja 3

1. Laske derivaatta funktioille

   a) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$

   b) $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{-x}\left((x \sin y - y \cos y) + \mathrm{i}\,(y \sin y + x \cos y)\right)$,

   c) $f(z) = z^{1/2}$, käyttämällä käänteisfunktion derivoimissääntöä
   $$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w = f(z).$$
   Huomaa, että f on moniarvoinen.

2. Tutki Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla, missä pisteissä z funktiot

   a) $f(z) = \frac{1}{z}$,

   b) $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$,

   c) $f(z) = z \mathrm{Im}\, z$,

   ovat derivoituvia ja laske derivaatta $f'(z)$ kyseisissä pisteissä.

3. Tutki, onko funktio $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ harmoninen. Jos on, niin määrää kaikki analyyttiset funktiot f, jolle $\mathrm{Re}\, f = u$.

4. Tarkista konformisuuden ehdot funktiolle $f(z) = z^2$ pisteessä $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$ tarkastelemalla suoria $z = 1 + \mathrm{i}t$, $z = t + 2t\mathrm{i}$ $(t \in \mathbb{R})$ ja niiden kuvia funktiolle f.

5. Tarkastellaan kenttää, jonka potentiaalifunktio on $f(z) = z + \frac{1}{z}$ (Joukowskin funktio).

   a) Tutki, missä alueen $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ pisteissä f on konforminen.

   b) Mitä käyriä pitkin ulkoinen varaus liikkuu alueessa Ω?

6. a) Funktiota
   $$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < y \in \mathbb{R},$$
   sanotaan *Poissonin ytimeksi.* Osoita, että Poissonin ydin on harmoninen funktio ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

   b) Voidaan osoittaa, että harmonisuus säilyy konformikuvauksessa. Toisin sanoen, jos f on harmoninen alueessa A ja $g : B \to A$ on konforminen, niin $f \circ g$ on harmoninen alueessa B. Osoita luentokalvojen Lauseen 4 avulla, että
   $$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$
   on konforminen ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Osoita lisäksi, että f kuvaa ylemmän puolitason yksikkökiekolle $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Määrää edellisen perusteella yksikkökiekossa harmoninen funktio.