

KOMPLEKSIANALYYSI

Harjoitus 2, syksy 2018

Lisäpistetehtävät: 1, 4 ja 5

1. Ratkaise yhtälö

a) $e^{iz} = 1 + i$.

b) $\sin z = 2$.

2. Mitä arvoja saa

a) $i^{-2/3}$?

b) $\log(2 + 2\sqrt{3}i)$? Määrää myös pääarvo.

c) $(1 - i)^i$?

3. a) Määrää funktion $f(z) = z^4$ reaali- ja imaginaariosa. Pascalin kolmio voi olla hyödyllinen reaali- ja imaginaariosan määrittämisessä.

b) Olkoot $u(x, y) = x^2 + x - y^2$ ja $v(x, y) = 2xy - y$. Määrää kompleksifunktio $f(z)$, jonka reaali- ja imaginaariosa on u ja v .

4. Muotoa

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

olevaa kompleksimuuttujan z funktiota sanotaan *Möbius-kuvaukseksi*. Määrää se Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 0 \quad \text{ja} \quad z_3 = 1$$

pisteille

$$w_1 = -i, \quad w_2 = 1 \quad \text{ja} \quad w_3 = i,$$

missä $w_i = f(z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Mikä on reaaliakselin kuva tälle Möbius-kuvaukselle?

5. Muodosta janalle AB , missä $A = 1 + i$ ja $B = 2 + 2i$, parametriesitys muuttujan $t \in [0, 2\pi]$ funktiona ja määrää eksponenttifunktion $f(z) = e^z$ kuvan $f(AB)$ parametriesitys muuttujan $t \in [0, 2\pi]$ funktiona. Piirrä joukko $f(AB)$.

6. Tarkastellaan logaritmfunktion päähaaraa

$$w = \text{Log}z = \ln|z| + i\text{Arg}z.$$

a) Määrää origokeskisten a -säteisten ympyröiden kuvat, kun $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. Piirrä kuvaajat sekä z -tasossa että w -tasossa.

b) Määrää origosta lähtevien säteiden kuvat, kun säteen ja positiivisen x -akselin välinen kulma on $\alpha = -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. Piirrä kuvaajat sekä z -tasossa että w -tasossa.

c) Tarkastele a)- ja b)-kohdan käyrien ja niiden kuvien välisten kulmien muuttumista. Laske esimerkiksi säteen, jolle $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ja 1-säteisen ympyrän välistä kulmaa sekä edellisten käyrien kuvien välistä kulmaa. Toista sama muille säteille ja ympyröille. Käyrien välisellä kulmalla tarkoitetaan niiden leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välistä kulmaa.