Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 3.12.2018

1. Piirrä niiden kompleksilukujen joukko, jossa toteutuu ehto

   a) $z^4 = -1$.

   b) $z + \mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i} = 0$.

   c) $|z - \mathrm{i}| < |z + \mathrm{i}|$.

2. Analyyttisillä funktioilla on läheinen yhteys tasovirtausten dynamiikkaan. Oletetaan, että virtaus kulkee pitkin virtausfunktion

$$v(x, y) = \mathrm{e}^{-y} \sin x \tag{1}$$

   tasa-arvokäyriä. Analyyttistä funktiota $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ sanotaan virtauksen kompleksiseksi potentiaaliksi. Määrää virtausfunktiota (1) vastaava kompleksinen potentiaali.

3. Erään diskreetin LTI-systeemin siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

   Laske LTI-systeemin impulssivaste, kun H:ta tarkastellaan alueessa

   a) $0 < |z| < 1$.

   b) $|z| > 1$.

4. Taajuusvastefunktio kertoo, miten LTI-systeemi vahvistaa ja vaihesiirtää eri kulmataajuudella värähteleviä herätesignaaleja. Analogisen LTI-systeemin taajuusvastefunktio $G(\omega)$ saadaan siirtofunktiosta $H(s)$ sijoituksella $s = \mathrm{i}\omega$. Olkoon erään systeemin siirtofunktio

$$H(s) = \frac{7000s}{s^2 + 7000s + 10^7}.$$

   a) Laske systeemin taajuusvastefunktio ja määrää sen eksponenttiesitys. (4p)

   b) Mitä systeemi tekee herätesignaalille $x(t) = \cos(2000t)$? (2p)

Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

Loppukoe 24.1.2019

1. Piirrä niiden kompleksilukujen z joukko, joille
   a) $z = \sqrt[2019]{-1}$.
   b) $z + \overline{z} = 0$.
   c) $1 < |z| < 2$.

2. Missä pisteissä $z = x + \mathrm{i}y$ funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on derivoituva, kun
   a)
   $$f(z) = x^2 + \mathrm{i}y^2.$$
   b)
   $$f(z) = |z|^2.$$

3. Laske residylaskun avulla integraali
   $$\int_0^\infty \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} \mathrm{d}x.$$

4. Määrää amplitudivaste ja vaihevaste digitaaliselle systeemille, joka laskee herätteelle $x(n)$ kolmen pisteen liukuvan keskiarvon
   $$y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2).$$
   Tutki, mitä taajuuksia systeemi korostaa laskemalla amplitudivasteen maksimikohta.

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + i\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n} e^{i\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z - z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-i\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-i\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} dz$$

Yksikköympyrä