Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

2. välikoe 29.10.2018

1. a) Laske funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Laurentin sarja pisteen $z_0 = \mathrm{i}$ ympäristössä $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$. (4p)

b) Määrää termin $(z-\mathrm{i})^{2018}$ kerroin a)-kohdan Laurentin sarjassa. (2p)

2. Määrää funktion f erikoispisteet, niiden laatu ja residyt erikoispisteissä, kun

a)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}.$$

b)

$$f(z) = z^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}.$$

3. Erään antisymmetrisen FIR-suodattimen siirtofunktio on

$$\mathbf{H}(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}.$$

a) Laske suodattimen impulssivaste.

b) Laske suodattimen amplitudivaste.

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

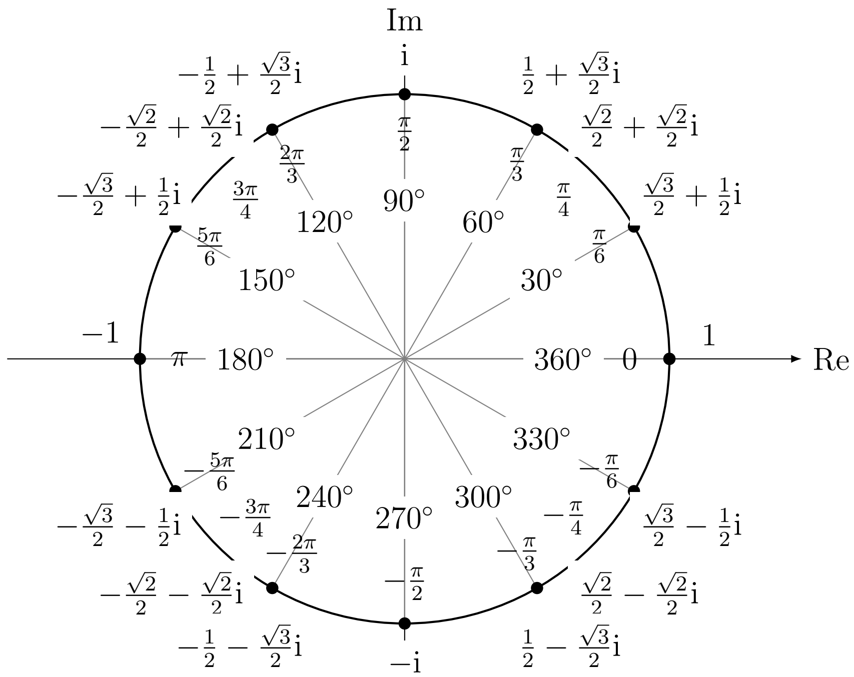
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r}\mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Lasketaan ensin nimittäjän nollakohdat. Nollakohdiksi saadaan $z = \mathrm{i}$ ja $z = -\mathrm{i}$, joten

$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{g(z)}{z-\mathrm{i}}, \quad g(z) = \frac{1}{z+\mathrm{i}}.$$

Koska g on analyyttinen kiekossa $|z - \mathrm{i}| < 2$, on sillä Taylorin sarja

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\mathrm{i})}{n!}(z-\mathrm{i})^n.$$

Derivoimalla saadaan

$$g'(\mathrm{i}) = -\frac{1}{(2\mathrm{i})^2}, \quad g''(\mathrm{i}) = (-1)(-2)\frac{1}{(2\mathrm{i})^3}, \ldots,$$
$$g^{(n)}(\mathrm{i}) = (-1)(-2)\cdots(-n)\frac{1}{(2\mathrm{i})^{n+1}} = (-1)^n n! \frac{1}{(2\mathrm{i})^{n+1}}.$$

Funktion f Laurentin sarja on siten

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^{n+1}}(z-\mathrm{i})^{n-1} \overset{\text{sij. } n-1=k}{=} \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\mathrm{i})^{k+2}}(z-\mathrm{i})^k.$$

b) Edellisen kohdan perusteella Laurentin sarjan kerroin a_{2018} on

$$a_{2018} = \frac{(-1)^{2019}}{(2\mathrm{i})^{2020}} = -\frac{1}{2^{2020}}.$$

2. a) Käyttämällä binomin neliön kaavaa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ saadaan

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2},$$

joten ainoa erikoispiste on $z = 1$, joka on toisen kertaluvun napa. Residyksi saadaan

$$a_{-1} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-1)^2\frac{z}{(z-1)^2}\right)\Big|_{z=1} = 1.$$

b) Koska z^2 ja $\exp z$ ovat analyyttisiä kaikkialla, on ainoa erikoispiste $z = 0$. Eksponenttifunktion sarjakehitelmästä saadaan

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2-n} = z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}z^{-1} + \ldots.$$

Yllä olevasta Laurentin kehitelmästä nähdään suoraan residy $a_{-1} = -\frac{1}{6}$. Koska z^{-n}:n kerroin on nollasta poikkeava äärettömän monella $n > 0$, on $z = 0$ oleellinen erikoispiste.

3. a) Koska $\mathbf{H}(z) = 1 - z^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$, on impulssivaste

$$(h(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 0, -1, 0, 0, \ldots), \quad \text{missä } h(n) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 3.$$

b) Amplitudivaste on

$$|H(\omega)| = |\mathbf{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})| = |1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})| = |2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\sin\omega| = 2|\sin\omega|.$$