Tekniikan matematiikka

Kompleksianalyysi (031077P)

1. välikoe 8.10.2018

1. Piirrä niiden kompleksilukujen joukko, jossa toteutuu ehto

   a) $z^3 = 1$.

   b) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.

   c) $1 \leq |z| \leq 2$ ja $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$.

2. Tutki, missä pisteissä $z = x + \mathrm{i}y$ funktio $f(z)$ on derivoituva, ja laske derivaatta $f'(z)$ kyseisissä pisteissä z, kun

   a)
   $$f(z) = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3).$$

   b)
   $$f(z) = 3xy + \mathrm{i}y^3.$$

3. Laske integraali
   $$\int_C f(z)\mathrm{d}z,$$
   kun C on ympyrä $|z - \mathrm{i}| = 2$ positiiviseen kiertosuuntaan kierrettynä ja

   a)
   $$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z(z^2 + 10)}.$$

   b)
   $$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^4}.$$

Koekaavat

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad z_k = |w|^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arg w + k2\pi)/n}$$

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]_{z=z_0}$$

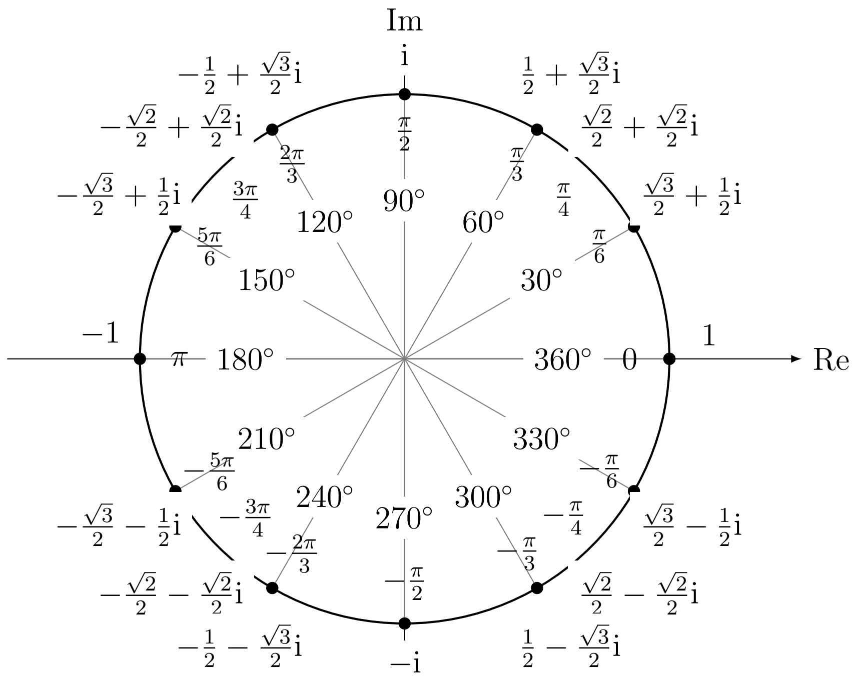
$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-\mathrm{i}\omega n} \qquad \mathbf{X}(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega k} \qquad x(n-k) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)z^{-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad h(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Yksikköympyrä



Tehtävien ratkaisuperiaatteet

1. a) Käyttämällä eksponenttiesitystä $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ ja $1 = e^{\mathrm{i}k2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ saadaan

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ja } \varphi = k\frac{2\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Yksikköympyrästä saadaan ratkaisuiksi $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ ja $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Kyseinen joukko koostuu näistä kolmesta pisteestä.

b) Kirjoitetaan $z = x + \mathrm{i}y$, jolloin $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, joten

$$\mathrm{Re}(z) = x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow |y| = |x|,$$

eli kyseinen joukko koostuu suorista $y = x$ ja $y = -x$.

c) Käytetään eksponenttiesitystä $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, jolloin annettu ehto voidaan kirjoittaa napakoordinaateissa muodossa $1 \le r \le 2$ ja $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Kyseinen joukko on siis ympyrärenkaan osa.

Jätetään joukkojen piirtämiset harjoitustehtäväksi.

2. a) Kirjoitetaan $f(z)$ muodossa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, jolloin tehtävänannon mukaan

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{ja} \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Funktiot u ja v ovat jatkuvasti derivoituvia, joten riittää tutkia, ovatko Cauchy-Riemannin yhtälöt $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$ voimassa. Laskemalla kyseiset osittaisderivaatat nähdään, että Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, joten f on derivoituva kaikkialla. Derivaatta on

$$f'(z) = u_x(x, y) + \mathrm{i}v_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 6xy\mathrm{i}$$

b) Nyt $u(x, y) = 3xy$ ja $v(x, y) = y^3$, jotka ovat jatkuvasti derivoituvia. Cauchy-Riemannin yhtälöistä saadaan yhtälöpari

$$u_x = 3y = 3y^2 = v_y \quad \text{ja} \quad u_y = 3x = 0 = -v_x.$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = 0$ ja edellisestä $y - y^2 = y(1 - y) = 0$, joten f on derivoituva kahdessa pisteessä $z = 0 + \mathrm{i}0 = 0$ ja $z = 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$. Derivaatta on $f'(z) = u_x(x, y) + \mathrm{i}v_x(x, y) = 3y$ kaikissa pisteissä $z = x + \mathrm{i}y$, joissa f on derivoituva, joten

$$f'(0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'(\mathrm{i}) = 3.$$

3. a) Funktion f navat eli nimittäjän nollakohdat ovat $z = 0$ ja $z = \pm\sqrt{10}\mathrm{i}$, joista ainoastaan $z = 0$ on integroimistien C sisäpuolella. Näin ollen f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{z(z^2 + 10)} = \frac{g(z)}{z}, \quad g(z) = \frac{e^{-z}}{z^2 + 10},$$

missä g on analyyttinen C:ssä ja sen sisäpuolella. Cauchyn kaavan mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \frac{g(z)}{z - 0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(0) = \frac{\pi}{5}\mathrm{i}.$$

b) Merkitään $g(z) = e^{-z}$ ja käytetään Cauchyn kaavaa derivaatalle, jonka mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3!}g^{(3)}(0) = -\frac{\pi}{3}\mathrm{i}.$$