Kompleksianalyysi, syksy 2018

Harjoitus 6, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Osoittajatermillä ei ole erikoispisteitä, sillä e^z on analyyttinen, kun $z \in \mathbb{C}$ ja $e^z \neq 0$. Nimittäjän nollakohdat ovat siis lausekkeen navat:

$$\begin{aligned} z^2(z^2+1) = 0 &\Leftrightarrow z = 0 (\text{kl. } 2) \text{ tai} \\ z^2+1 = 0 &\Leftrightarrow z = \pm \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Erikoispisteet ovat siis kl. 2 napa $z = 0$ ja kl. 1 navat $z = \pm\mathrm{i}$. Määritelmän 3 mukaan, jos z_0 on erikoispiste ja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, niin a_{-1} on $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ eli $f(z)$:n residy pisteessä z_0. Tutkitaan funktiota pisteessä $z_0 = 0$. Nyt OMK:n avulla saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{z^2(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{e^z}{z^2}\left(\frac{A}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{z-\mathrm{i}}\right) \text{ ks. T5 a)} \\ &= \frac{e^z}{2z^2}\left(\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) = \frac{e^z}{2z^2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}z} + \frac{1}{1-(-\mathrm{i}z)}\right) \\ &= \frac{e^z}{2z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\mathrm{i}^n z^n\right) = e^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)\mathrm{i}^n}{2}z^{n-2}\right). \end{aligned}$$

Koska $e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= (\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!})(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)\mathrm{i}^n}{2}z^{n-2}) \\ &= \frac{z^0}{0!}\cdot\frac{(1+(-1)^0)\mathrm{i}^0}{2}z^{0-2} + \frac{z^1}{1!}\cdot\frac{(1+(-1)^0)\mathrm{i}^0}{2}z^{0-2} + \frac{z^0}{0!}\cdot\frac{(1+(-1)^1)\mathrm{i}^1}{2}z^{1-2} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \\ &= z^{-2} + z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \\ &= a_{-2} + a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k. \end{aligned}$$

Kun $z_0 = 0$, residy $a_{-1} = 1$.
Muihin erikoispisteisiin liittyvät residyt voitaisiin laskea samalla periaatteella, mutta edellisestä huomattiin, että tämä tapa on työläs. Yksinkertaisemmin residyt saa laskettua kaavan $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ avulla. Kun $z_0 = -\mathrm{i}$ saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}} f(z) &= \lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\frac{e^z}{z^2(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} \\ &= \lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{e^z}{z^2(z-\mathrm{i})} = \frac{e^{-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}}}{2} \end{aligned}$$

ja kun $z_0 = \mathrm{i}$ saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) &= \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{e^z}{z^2(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} \\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{e^z}{z^2(z+\mathrm{i})} = \frac{e^{\mathrm{i}}}{-2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}}}{2} \end{aligned}$$

b) Merkitään $f(z) = \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{g(z)}{h(z)}$. Funktion erikoispisteet ovat $h(z) = \cos(z)$:n nollakohdat:

$$\cos(z) = 0 \ \Leftrightarrow \ z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Näistä mikään ei ole yhteinen $g(z) = \sin(z)$:n nollakohtien, $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, kanssa. Toisin sanoen on voimassa $h(z_0) = 0,\ g(z_0) \neq 0$ ja lisäksi $h'(z_0) = -\sin(z_0) \neq 0$. Erikoispisteet $z_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ovat kaikki siis kertaluokkaa 1 olevia napoja. Näin ollen residyt näissä pisteissä saadaan laskettua luennoilla esitetyn kaavan mukaisesti:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{\sin(z_0)}{-\sin(z_0)} = -1.$$

Residyt ovat siis kaikissa erikoispisteissä samat.

c) Selvästikin funktion $f(z)$ erikoispiste on kohdassa $z = 0$. Luennoilla on esitetty funktion $\sin(z)$ Taylorin sarjakehitelmä $(z_0 = 0)$:

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \text{ joten} \\
\sin(\frac{1}{z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} \text{ ja edelleen} \\
z^4 \sin(\frac{1}{z}) &= z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n+3} \\
&= z^3 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{120} z^{-1} \ldots = \sum_{k=-\infty}^{3} a_k (z - z_0)^k
\end{aligned}$$

Huomataan, että funktion $f(z) = z^4 \sin(\frac{1}{z})$ Laurentin sarjassa negatiivisten potenssien termejä on rajattomasti. Ei siis ole olemassa lukua l siten, että $a_{-k} = 0$ kaikille luvuille $k > l$. Tämän vuoksi piste $z_0 = 0$ on oleellinen erikoispiste ja sen residy $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{120}$.

2. a) Nimittäjässä olevan toisen asteen polynomin $P(z) = z^2 + 2z + k^2$ diskriminantti on $D = 4 - 4k^2$, joten meillä on kaksi tapausta

(i) $k \leq 1$, jolloin polynomin molemmat nollakohdat ovat reaalisia. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan polynomin nollakohdiksi

$$z_+ = -1 + \sqrt{1 - k^2} \quad \text{ja} \quad z_- = -1 - \sqrt{1 - k^2}.$$

Koska

$$-1 - \underbrace{\sqrt{1 - k^2}}_{\geq 0} \leq -1 \quad \text{ja} \quad -1 \leq -1 + \underbrace{\sqrt{1 - k^2}}_{\leq 1} \leq -1 + 1 = 0,$$

on z_- aina joko yksikköympyrän kehällä tai yksikköympyrän ulkopuolella. Edelleen, jos $k = 1$, on $z_\pm = -1$ yksikköympyrän kehällä, ja jos $k < 1$, on z_+ yksikköympyrän sisällä.

(ii) $k > 1$, jolloin polynomin molemmat nollakohdat ovat kompleksilukuja. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan polynomin nollakohdiksi

$$z_+ = -1 + \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1} \quad \text{ja} \quad z_- = -1 - \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1},$$

jotka molemmat ovat yksikköympyrän ulkopuolella, sillä $\mathrm{Re}(z_\pm) = -1$ ja $\mathrm{Im}(z_\pm) \neq 0$.

Merkitään yksikkökiekkoa symbolilla $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Yksikköympyrän sisäpuolella olevien napojen lukumäärä on

$$\#\{z \in \mathbb{D} \ : \ z = z_\pm\} = \begin{cases} 1, & \text{kun } k < 1, \\ 0, & \text{kun } k \geq 1. \end{cases}$$

b) Edellisen kohdan perusteella polynomilla $P(z)$ on kaksi nollakohtaa, kun $k \neq 1$, ja yksi nollakohta $z_\pm = -1$, kun $k = 1$. Näin ollen navat ovat yksinkertaisia, kun $k \neq 1$, ja napa $z_\pm = -1$ on kaksinkertainen.

Jaetaan nimittäjän polynomi tekijöihin $P(z) = (z - z_+)(z - z_-)$. Yksinkertaisille navoille z_0 residy voidaan laskea kaavalla

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{P(z)}.$$

Otetaan esimerkkinä $z_+ = -1 + \sqrt{1-k^2}$ tapauksessa $k < 1$. Ylläolevan kaavan mukaan

$$\operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) = \lim_{z\to z_+} = \frac{z - z_+}{(z-z_+)(z-z_-)} = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

Muut tapaukset voidaan laskea vastaavasti.
Kaksinkertaiselle navalle $z_\pm = -1$ residyksi saadaan

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(z+1)^2}{(z+1)^2}\right) = 0,$$

sillä vakiofunktion 1 derivaatta on nolla.
Kootaan edellä todettu yhteen

$$\operatorname{Res}_{z=z_\pm} f(z) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}, & \text{kun } k < 1,\\ 0, & \text{kun } k = 1,\\ \mp\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}\mathrm{i}, & \text{kun } k > 1.\end{cases}$$

3. Merkitään $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Teorian mukaan tämän tyyppinen epäoleellinen integraali voidaan laskea residyjen avulla kaavalla $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$, missä pisteet z_k ovat eristettyjä erikoispisteitä. Tässä tapauksessa erikoispisteet ovat $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$:n navat:

$$g(z) = z^4 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})},\; k = 0,1,2,3.$$

Nimittäjällä ja osoittajalla ei selvästi ole yhteisiä nollakohtia, joten nimittäjän nollakohdat ovat funktion $f(z)$ 1. kl:n napoja. Määrätään residyt navoissa, jotka sijaitsevat ylemmässä puolitasossa. Kun $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ ja $g'(z) = 4z^3$:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z_0+1}{4z_0^3} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+1}{4e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\\ &= \frac{1}{4}(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(-\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i})) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1 + (\sqrt{2}+1)\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Kun $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $\mathrm{Im}(z_1) > 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) &= \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{z_1+1}{4z_1^3} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}+1}{4e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}}}\\ &= \frac{1}{4}(e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 + (\sqrt{2}-1)\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Koska muut navat sijaitsevat alemmassa puolitasossa, niitä ei tarvitse huomioida. Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+(\sqrt{2}+1)\mathrm{i}) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+(\sqrt{2}-1)\mathrm{i})\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.\end{aligned}$$

4. Lasketaan integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{f^4+10f^2+9}\mathrm{d}f$ residyjen avulla. Tässä tapauksessa erikoispisteet ovat $|H(z)|^2 = \frac{h(z)}{g(z)}$:n navat:

$$\begin{aligned} g(z) &= z^4 + 10z^2 + 9 = 0,\; \text{merk. } w = z^2\\ &\Leftrightarrow w^2 + 10w + 9 = 0\\ &\Leftrightarrow w = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 9}}{2} = -5 \pm 4 \text{ jolloin}\\ z &= \pm\sqrt{-5\pm 4} = \begin{cases}\pm 3\mathrm{i}\\ \pm\mathrm{i}.\end{cases}\end{aligned}$$

Määrätään residyt navoissa, jotka sijaitsevat ylemmässä puolitasossa. Nämä navat ovat $z_0 = \mathrm{i}$ ja $z_1 = 3\mathrm{i}$. Nyt $g'(z) = 4z^3 + 20z$, joten residy pisteessä $z_0 = \mathrm{i}$ on

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} |H(z)|^2 = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{9}{4z_0^3 + 20z_0} = \frac{9}{-4\mathrm{i} + 20\mathrm{i}} = -\frac{9}{16}\mathrm{i}$$

ja pisteessä $z_1 = 3\mathrm{i}$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} |H(z)|^2 = \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{9}{4z_1^3 + 20z_1} = \frac{9}{-108\mathrm{i} + 60\mathrm{i}} = \frac{3}{16}\mathrm{i}$$

Koska muut navat sijaitsevat alemmassa puolitasossa, niitä ei tarvitse huomioida. Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathrm{d}f &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{9}{16}\mathrm{i} + \frac{3}{16}\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Koska $2|H(0)|^2 = 2$, niin

$$W_{eq} = \frac{3\pi}{8}.$$

5. Merkitään $S(f) = \frac{f^2}{f^4+20f^2+100} = \frac{h(f)}{g(f)}$. Lasketaan Funktion $S(z)$ navat:

$$\begin{aligned} & z^4 + 20z^2 + 100 = 0, \text{ merk. } w = z^2 \\ \Leftrightarrow\ & w^2 + 20w + 100 = 0 \\ & \qquad w = \frac{-20 \pm \sqrt{400-400}}{2} = -10 \text{ (kl. 2)} \\ & \qquad \Rightarrow z = \pm\sqrt{-10} = \pm\mathrm{i}\sqrt{10} \text{ (kl. 2).}\end{aligned}$$

Nimittäjän nollakohdat ovat erit kuin osoittajalla, joten $S(z)$:n navat ovat $z = \pm\mathrm{i}\sqrt{10}$ (kl. 2). Funktiolla $S(z)$ ei siis ole reaalisia napoja. Toisen kertaluokan napa $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{10}$ kuuluu ylempään puolitasoon.Tätä pistettä vastaava residy on $\operatorname*{Res}_{z=z_0} S(z) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_0)^2 S(z)\right]_{z=z_0}$. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_0)^2 f(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-\mathrm{i}\sqrt{10})^2 \frac{z^2}{(z-\mathrm{i}\sqrt{10})^2(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^2}{(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^{-2} \\ &= 2z(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^{-2} - 2z^2(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^{-3} = \frac{2z\sqrt{10}\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^3}.\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} S(z) &= \left[\frac{2z\sqrt{10}\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i}\sqrt{10})^3}\right]_{z=\mathrm{i}\sqrt{10}} \\ &= \frac{-20}{-80\sqrt{10}\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{10}}{40}.\end{aligned}$$

Tehoksi saadaan näin

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\mathrm{d}f = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=z_0} S(z) = \frac{\sqrt{10}\pi}{20}.$$

6. Määritelmän mukaan Fourier-muunnnos on

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} e^{-\mathrm{i}ax} \mathrm{d}x.$$

Lasketaan muunnos residylaskun avulla. Sitä varten pitää laskea funktion f navat. Nyt nimittäjän tekijöiden jako on helppo ja saadaan

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}.$$

Käytetään luentokalvojen viikon 6 Lausetta 5, jonka mukaan riittää tarkastella ainoastaan ylemmässä puolitasossa olevia napoja. Koska $z = \mathrm{i}$ on ainoa ylemmän puolitason napa ja sen kertaluku on kaksi, niin

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} f(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left((z-\mathrm{i})^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} f(z)\right) \Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^2} \right) \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \left(-\mathrm{i}a \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^2} - 2 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i})^3} \right) \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \left(\frac{a\mathrm{i}}{4} + \frac{1}{4\mathrm{i}} \right) \mathrm{e}^a = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathrm{i}} + a\mathrm{i} \right) \mathrm{e}^a.
\end{aligned}$$

Residylauseen mukaan

$$F(a) = 2\pi \mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} f(z) = \frac{\pi}{2} (-a+1)\, \mathrm{e}^a = \frac{\pi}{2} (|a|+1)\, \mathrm{e}^{-|a|}, \quad \text{kun } a < 0.$$

Koska f on parillinen ja reaalinen, myös sen Fourier-muunnos on parillinen ja reaalinen, joten

$$F(a) = \frac{\pi}{2} (|a|+1)\, \mathrm{e}^{-|a|}, \text{ kun } a > 0.$$

Edellisten perusteella

$$F(a) = \frac{\pi}{2} (|a|+1)\, \mathrm{e}^{-|a|}$$

kaikilla $a \in \mathbb{R}$.