Kompleksianalyysi, syksy 2018

Harjoitus 7, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Hahmotellaan ensin jonoa $(c_2(n))_{n=0}^{\infty}$. Koska $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n} = (-1)^n$, on jonon joka toinen termi nolla ja joka toinen termi on yksi. Jono $(c_2(n))_{n=0}^{\infty}$ on siis muotoa

$$(c_2(n))_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots).$$

Yllä olevasta esityksestä nähdään, että jonolla $(c_2(n))$ kertominen nollaa parittoman indeksin termit jonosta $(x(n))$, eli

$$(x(n)c_2(n))_{n=0}^{\infty} = (x(0), 0, x(2), 0, x(4), 0, \dots).$$

Tämän perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2} = x(0) + 0 \cdot x(1)z^{-1/2} + x(2)z^{-1} + 0 \cdot x(3)z^{-3/2} + x(4)z^{-2} + \dots,$$

jonka perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2} = \sum_{k=0}^{\infty} x(2k)z^{-k}.$$

Koska $c_2(2k) \equiv 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, on $x(2k) = x(2k)c_2(2k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja päädytään tulokseen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n)c_2(2n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2}.$$

b) Määritelmän mukaan desimoidun signaalin Z-muunnos on

$$X_{\downarrow 2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\downarrow 2}(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(2n)z^{-n}.$$

Tästä ei vielä nähdä, miten desimoidun signaalin Z-muunnos voidaan laskea alkuperäisen jonon $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnoksen avulla. Mutta jos termiä $x(2n)$ kerrotaan luvulla $c_(2n) \equiv 1$ (eli ei tehdä käytännössä mitään) ja käytetään a)-kohdan tulosta saadaan

$$\begin{aligned}
X_{\downarrow 2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)c_2(n)z^{-n/2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n/2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(-1)^n z^{-n/2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\sqrt{z})^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(-\sqrt{z})^{-n} \\
&= \frac{1}{2}X(\sqrt{z}) + \frac{1}{2}X(-\sqrt{z}),
\end{aligned}$$

missä $X(z)$ on jonon $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos.

2. Siirtofunktion nimittäjän nollakohdat ovat

$$z^2 + 7z + 12 = 0 \ \Leftrightarrow \ z = -3 \text{ tai } z = -4.$$

Nämä ovat myös $H(z)$:n navat (kl. 1), sillä osoittajan nollakohta on 0. Impulssivaste saadaan laskettua nyt residylauseen avulla (erikoispisteet $z_1 = -3$ ja $z_2 = -4$):

$$\begin{aligned}
h(k) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{z^k}{(z+3)(z+4)}\mathrm{d}z \\
&= \operatorname*{Res}_{z=-3} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-4} f(z) = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{z^k}{(z+3)(z+4)} + \lim_{z\to -4}(z+4)\frac{z^k}{(z+3)(z+4)} \\
&= \frac{(-3)^k}{1} + \frac{(-4)^k}{-1} = (-1)^k(3^k - 4^k).
\end{aligned}$$

Impulssivaste on siis $h(k) = (-1)^k(3^k + 4^k), \ k = 0, 1, 2, \dots.$

3. Siirtofunktion nimittäjän nollakohdat ovat

$$z^2 + z + \frac{3}{16} = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -\frac{3}{4} \text{ tai } z = -\frac{1}{4}.$$

Nämä ovat myös $H(z)$:n navat (kl. 1), sillä osoittajan nollakohta on 0. Impulssivaste saadaan laskettua nyt residylauseen avulla (erikoispisteet $z_1 = -\frac{3}{4}$ ja $z_2 = -\frac{1}{4}$):

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \mathbf{H}(z) z^{k-1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} f(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r} \frac{z^k}{(z+\frac{3}{4})(z+\frac{1}{4})} \mathrm{d}z \\ &= \operatorname*{Res}_{z=-\frac{3}{4}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{4}} f(z) = \lim_{z \to -\frac{3}{4}} (z + \frac{3}{4}) \frac{z^k}{(z+\frac{3}{4})(z+\frac{1}{4})} + \lim_{z \to -\frac{1}{4}} (z + \frac{1}{4}) \frac{z^k}{(z+\frac{3}{4})(z+\frac{1}{4})} \\ &= \frac{(-\frac{3}{4})^k}{-\frac{1}{2}} + \frac{(-\frac{1}{4})^k}{\frac{1}{2}} = (-1)^k (2 - 2 \cdot 3^k) 4^{-k}. \end{aligned}$$

Impulssivaste on siis $h(k) = (-1)^k (2 - 2 \cdot 3^k) 4^{-k},\; k = 0, 1, 2, \ldots.$

4. Teorian mukaan taajuusvastefunktio saadaan jonon diskreettinä Fourier-muunnoksena: $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(n)\}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-\mathrm{i}\omega n}$. Taajuusvastefunktio on siis

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-\mathrm{i}\omega n} = \sum_{n=0}^{2} h(n) e^{-\mathrm{i}\omega n} = h(0) + h(1) e^{-\mathrm{i}\omega} + h(2) e^{-\mathrm{i}2\omega} \\ &= 1 + 2e^{-\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}2\omega} = e^{-\mathrm{i}\omega}(e^{\mathrm{i}\omega} + 2 + e^{-\mathrm{i}\omega}) = e^{-\mathrm{i}\omega} \left(2 + 2 \cdot \frac{e^{\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega}}{2} \right) \\ &= e^{-\mathrm{i}\omega} (2\cos\omega + 2) \end{aligned}$$

Amplitudivaste:

$$|H(\omega)| = |e^{-\mathrm{i}\omega}||2\cos\omega + 2| = 2\cos\omega + 2$$

Vaihevaste:

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \arg H(\omega) = \arg(e^{-\mathrm{i}\omega}) + \arg(2\cos\omega + 2) \\ &= -\omega. \end{aligned}$$

5. Lasketaan differenssiyhtälön puolittainen diskreetti Fourier-muunnos:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \tfrac{1}{4} X(\omega) e^{-\mathrm{i}0\omega} + \tfrac{1}{4} X(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4} X(\omega) e^{-\mathrm{i}2\omega} \\ &= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} e^{-\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4} e^{-\mathrm{i}2\omega} \right) X(\omega) \\ &= H(\omega) X(\omega) \\ H(\omega) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} e^{-\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4} e^{-\mathrm{i}2\omega} = e^{-\mathrm{i}\omega} \left(\tfrac{1}{4} e^{\mathrm{i}\omega} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} e^{-\mathrm{i}\omega} \right) \\ &= \tfrac{1}{4} e^{-\mathrm{i}\omega} \left(2 \cdot \tfrac{e^{\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega}}{2} + 1 \right) \\ &= \tfrac{1}{4} (2\cos(\omega) + 1) e^{-\mathrm{i}\omega} = R(\omega) e^{\mathrm{i}\phi(\omega)} \end{aligned}$$

Ampliditudivaste:

$$|H(\omega)| = |R(\omega)| = \tfrac{1}{4} |2\cos(\omega) + 1|$$

Vaihevaste:

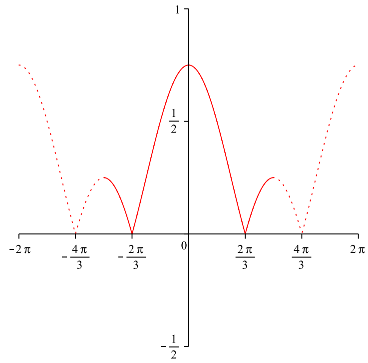
$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \arg(H(\omega)) = \arg(2\cos(\omega) + 1) + \arg(e^{-\mathrm{i}\omega}) \\ &= \begin{cases} -\omega\,, & \text{kun } 2\cos(\omega) + 1 \geq 0 \\ \pi - \omega\,, & \text{kun } 2\cos(\omega) + 1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Amplitudivasteen nollakohdat ω:

$$1 + 2\cos\omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\omega = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \omega = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi,\; n \in \mathbb{Z}$$

Nollakohdista välillä $[-\pi, \pi]$ ovat pisteet $-\frac{2\pi}{3}$ ja $\frac{2\pi}{3}$.

Amplitudivasteen kuvaaja



6. Lasketaan ensin taajuusvastefunktio siirtofunktiota $\mathbf{H_1}$ vastaavalle osalle (suodattimelle). Määritelmän mukaan taajuusvastefunktio on

$$H_1(\omega) = \mathbf{H_1}(e^{\mathrm{i}\omega}) = -1 + 2e^{-\mathrm{i}\omega} - 2e^{-\mathrm{i}2\omega} + e^{-\mathrm{i}4\omega}.$$

Puolitetaan korkein taajuus 4ω, jolloin päästään käyttämään Eulerin kaavaa ottamalla $e^{-\mathrm{i}2\omega}$ yhteiseksi tekijäksi. Tällöin

$$H_1(\omega) = e^{-\mathrm{i}2\omega}(-e^{\mathrm{i}2\omega} + 2e^{\mathrm{i}\omega} - 2e^{-\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}2\omega}) = e^{-\mathrm{i}2\omega}(-2\mathrm{i}\sin(2\omega) + 4\mathrm{i}\sin(\omega)).$$

Käyttämällä sinin yhteenlaskukaavaa $\sin(2\omega) = 2\sin\omega\cos\omega$ saadaan edellisestä

$$H_1(\omega) = (-4\mathrm{i}\sin\omega\cos\omega + 4\mathrm{i}\sin\omega)e^{-\mathrm{i}2\omega} = 4\mathrm{i}\sin\omega(1-\cos\omega)e^{-\mathrm{i}2\omega},$$

josta nähdään, että vaihevaste on lineaarinen, sillä i aiheuttaa $\pi/2$:n vaihesiirron ja $\sin\omega$ aiheuttaa π:n vaihesiirron, kun $\sin\omega < 0$. Vaihevaste on siis

$$\arg H_1(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega, & \text{kun } \sin\omega > 0, \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega, & \text{kun } \sin\omega < 0. \end{cases}$$

Edellä lasketun perusteella jälkimmäistä siirtofunktiota vastaavan osan (suodattimen) taajuusvastefunktio on

$$H_2(\omega) = (4\mathrm{i}\sin\omega(1-\cos\omega) + 1)e^{-\mathrm{i}2\omega},$$

joka voidaan Eulerin kaavalla $e^{-\mathrm{i}2\omega} = \cos(2\omega) - \mathrm{i}\sin(2\omega)$ saattaa perusmuotoon

$$H_2(\omega) = 4\sin\omega(1-\cos\omega)\sin(2\omega) + \cos(2\omega) + \mathrm{i}(4\sin\omega(1-\cos\omega)\cos(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Vaihevasteen epälineaarisuus nähdään esimerkiksi piirtämällä funktion

$$\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H_2(\omega))}{\mathrm{Re}(H_2(\omega))}\right) = \arctan\left(\frac{4\sin\omega(1-\cos\omega)\cos(2\omega) - \sin(2\omega)}{4\sin\omega(1-\cos\omega)\sin(2\omega) + \cos(2\omega)}\right)$$

kuvaaja vaikkapa graafisella laskimella tai tietokoneella.

Tiedonkeruulaitteen osaksi kannattaa valita se, joka vastaa siirtofunktiota $\mathbf{H_1}$.