Kompleksianalyysi, syksy 2018

Harjoitus 5, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. Nyt $\lim\limits_{n\to 0} \mathrm{Re}\, z_n = 2$ ja $\lim\limits_{n\to 0} |\mathrm{Im}\, z_n| = \lim\limits_{n\to 0} \frac{1}{n^2} = 0$, joten $\lim\limits_{n\to 0} \mathrm{Im}\, z_n = 0$ ja edelleen $\lim\limits_{n\to 0} z_n = 2$.

   Luvun z_n argumentin pääarvo $\mathrm{Arg}\, z_n = \begin{cases} -\arctan(\frac{1}{2n^2}), & n = 1, 3, 5, \ldots \\ \arctan(\frac{1}{2n^2}), & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$.

   Nyt $\lim\limits_{n\to 0} \mathrm{Arg}\, z_n = -\arctan(0) = 0$, kun n on pariton ja $\lim\limits_{n\to 0} \mathrm{Arg}\, z_n = \arctan(0) = 0$, kun n on parillinen, joten jokaiselle ϵ voidaan löytää sellainen n, että $|\mathrm{Arg} z - \mathrm{Arg} z_n| < \epsilon$. (Parittomien n:n arvojen mukainen jono lähestyy 0:aa negatiiviselta puolelta ja parillisten positiiviselta puolelta). Luentoesimerkissä raja-arvoa ei ollut, koska lähestyttävä piste oli eri parillisille ja parittomille n:n arvoille.

2. a) Sijoittamalla $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ geometrisen summan kaavaan

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+2\delta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+3\delta)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\delta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta/2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)}, \end{aligned}$$

joten

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + 3\delta/2)} \right) = \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)} \cos(\omega t + 3\delta/2).$$

Merkitään

$$R(\delta) = \frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta/2)}, \tag{1}$$

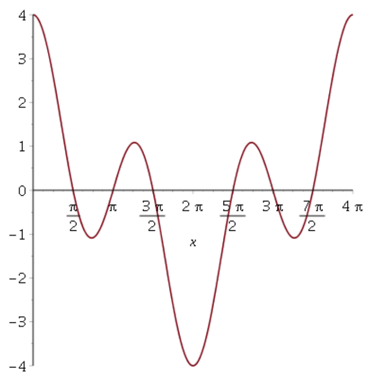
jolloin amplitudi on

$$A(\delta) = |R(\delta)| \tag{2}$$

Amplitudin maksimiarvo voidaan katsoa vaikkapa funktion $R(\delta)$ kuvaajasta, josta nähdään, että maksimi on 4 ja se saavutetaan, kun viive on $\delta = 0$. Tässä arvo nollassa voidaan laskea raja-arvona $\delta \to 0$. Toinen tapa on erottaa tapaukset $\delta = 0$ ja $\delta \neq 0$. Kun $\delta = 0$, niin

$$f(t) = \mathrm{Re}\, 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 4\cos(\omega t).$$

Tapaus $\delta \neq 0$ on käsitelty edellä.



Kuva 1: Funktion $R(\delta)$ kuvaaja yhden jakson yli, josta nähdään, että amplitudin maksimi on 4.

Ääriarvo voidaan laskea myös normaalilla ääriarvotarkastelulla. Käyttämällä kaksinkertaisen kulman kaavoja saadaan

$$\begin{aligned} R(\delta) &= \frac{2\sin(\delta)\cos(\delta)}{\sin(\delta/2)} = \frac{4\sin(\delta/2)\cos(\delta/2)(2\cos^2(\delta/2)-1)}{\sin(\delta/2)} \\ &= 4\cos(\delta/2)(2\cos^2(\delta/2)-1), \quad \delta \neq k\pi. \end{aligned}$$

Jos yllä merkitään $y = \cos(\delta/2)$ ja tarkastellaan ääriarvoja välillä $[0,1]$, nähdään, että maksimiarvo on 4 ja se saavutetaan, kun $y = \cos(\delta/2) = 1$, eli kun $\delta = 0$.
Kuvasta 1 näkyy, että funktio $R(\delta)$ saa myös negatiivisia arvoja. Koska amplitudi on funktion $R(\delta)$ itseisarvo, nähdään, että vaihekulma ϕ riippuu funktion $R(\delta)$ merkistä. Kun $R(\delta) < 0$, niin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(t) = R(\delta)\cos(\omega t + 3\delta/2) = -|A(\delta)|\cos(\omega t + 3\delta/2) = |A(\delta)|\cos(\omega t + 3\delta/2 + \pi),$$

sillä $-\cos(x) = \cos(x+\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämän perusteella $f(t)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(t) = A(\delta)\cos(\omega t + \phi),$$

missä

$$\phi = \phi(\delta) = \begin{cases} \frac{3\delta}{2}, & \text{kun } R(\delta) \geq 0, \\ \frac{3\delta}{2} + \pi, & \text{kun } R(\delta) < 0, \end{cases}$$

sekä R ja A on määritelty kaavoilla (2) ja (2).

b) Olkoon nyt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega t + \delta_k)$$

edellyttäen, että sarja suppenee. Jos $|A_k| \leq Ck^{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$, niin sarja suppenee itseisesti, sillä

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|A_k \cos(\omega t + \delta_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} < \infty.$$

Jos taas $\alpha \leq 1$, niin yleisesti sarja ei suppene itseisesti. Esimerkiksi, kun $\delta_k = k2\pi$ ja $A_k = k^{-\alpha}$, niin

$$f(t) = \cos(\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} = \infty, \quad \alpha \leq 1.$$

3. a) Geometrisen sarjan summakaavan avulla

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{2-(-(z-2))} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{1}{2}(z-2))} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}(z-2))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-2)^n, \end{aligned}$$

kun $\frac{1}{2}|z-2| < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 2$.

b) Funktiolle voidaan muodostaa myös Taylorin sarja, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. Lasketaan muutamia derivaattoja yleisen termin löytymiseksi.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(z) &= \frac{-1}{z^2} \\ f^{(2)}(z) &= \frac{2}{z^3} \\ f^{(3)}(z) &= \frac{-2\cdot 3}{z^4} \\ f^{(4)}(z) &= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{z^5} \\ \Rightarrow f^{(n)}(z) &= \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

Nyt siis $z_0 = 2$, joten

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}}{n!}(z-2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-2)^n,
\end{aligned}
$$

kun $|z-2| < 2$, sillä sarjan suppenemissäde voidaan laskea kaavalla

$$
R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}} \right| = 2.
$$

Edellisen perusteella $f^{(2018)}(2) = \frac{2018!}{2^{2019}}$ ja suppenemissäde $R = 2$.

4. a) Käytetään vihjettä ja kirjoitetaan $H(z)$ muodossa

$$
H(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1}.
$$

Geometrisen sarjan summakaavan käyttö oli luvallista, sillä $|-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$. Tehdään indeksinvaihto $n = -k$, jolloin siirtofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$
H(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} (-1)^k z^{-(2k+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n},
$$

josta voidaan lukea impulssivaste

$$
h(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{kun } n = 2k+1 \text{ ja } k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}
$$

b) Kun $|z| > 1$, kirjoitetaan

$$
H_1(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(-z^{-2})}.
$$

Koska $|-z^{-2}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$, voidaan jälleen käyttää geometrisen sarjan summakaavaa ja saadaan

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{z^3}\frac{1}{1-(-z^{-2})} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-2})^k = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2k-3} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-(2k+3)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n},
\end{aligned}
$$

josta voidaan lukea impulssivaste

$$
h(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{kun } n = 2k+3 \text{ ja } k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}
$$

5. Lasketaan OMK:

$$
f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3} = \frac{(A+B)z + 3A + B}{(z-1)(z-3)}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}
$$

eli

$$
f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)
$$

a) Koska $|z| > 1$, niin

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z(1+1/z)} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1-(-1/z)} = \frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^{k-1}z^{-k}. \tag{3}$$

Viimeinen yhtäsuuruus voidaan perustella vaikkapa summausindeksin vaihdolla $k \leftrightarrow l+1$ ja vaihtamalla lopuksi l takaisin k:ksi.
Koska $|z| < 3$, niin

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6(1+z/3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-(-z/3)} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}z^k. \tag{4}$$

Näin ollen Laurentin sarja on

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad 1 < |z| < 3,$$

missä

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{2\cdot 3^{k+1}}, & \text{kun } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2}, & \text{kun } k \leq 1. \end{cases}$$

b) Kun $|z| > 3$, niin termi $\frac{1}{2(z+1)}$ voidaan kehittää kuten a)-kohdassa. Toinen termi taasen kehitetään seuraavasti

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1-(-3/z)} = \frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}}{2}z^{-k}. \tag{5}$$

Yhdistämällä summat (3) ja (5) saadaan

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}((-1)^{k-1} - (-3)^{k-1})}_{=a_{-k}} z^{-k}, \quad |z| > 3.$$

c) Kun $|z| < 1$, niin termi $\frac{1}{2(z+3)}$ kehitetään kuten a)-kohdassa. Toinen termi kehitetään seuraavasti

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k. \tag{6}$$

Yhdistämällä summat (4) ja (6) saadaan

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}(-1)^k\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)}_{=a_k} z^k, \quad |z| < 1.$$