Kompleksianalyysi, syksy 2018

Harjoitus 4, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. Parametriesityksen avulla integraali $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ voidaan esittää muodossa $\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$

   a) Nyt $C: \ z(t) = t^2 + \mathrm{i}t$, joten $z'(t) = 2t + \mathrm{i}$, $0 \leq t \leq 1$ ja $f(z(t)) = z(t)^2 = (t^2 + \mathrm{i}t)^2 = t^4 + 2\mathrm{i}t^3 - t^2$. Integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 (t^4 + 2\mathrm{i}t^3 - t^2)(2t + \mathrm{i})\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 (5t^4 - t^2)\mathrm{d}t \\ &= \Big/_0^1 \left(\frac{1}{3}t^6 - t^4\right) + \mathrm{i} \Big/_0^1 \left(t^5 - \frac{1}{3}t^3\right) \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

   b) Lasketaan integraali kullekin osapolulle C_i erikseen. Ensiksi $C_1: \ z(t) = t$, joten $z'(t) = 1, \ 0 \leq t \leq 1$, ja saadaan

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}.$$

   Osapolulle C_2 on $z'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, ja $|z(t)| = 1$, joten

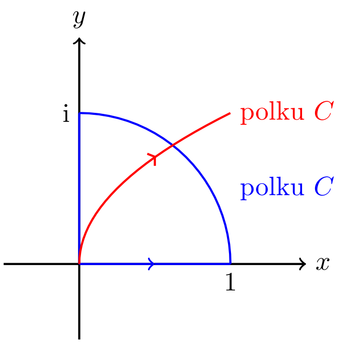
$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i} - 1.$$

   Viimeisimmälle osapolulle C_3 on $z'(t) = -\mathrm{i}$ ja $|z(t)| = 1 - t$, joten

$$\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\int_0^1 (1 - t)\mathrm{d}t = \mathrm{i} \Big/_0^1 \frac{1}{2}(1 - t)^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

   Kokoamalla edellä lasketut integraalit yhteen saadaan käyräintegraaliksi

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2} + \mathrm{i} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$



Kuva 1: Tehtävän 1 polut

2. Samalla tavalla kuin tehtävässä 1 voidaan todeta, että parametriesityksen avulla integraali $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ voidaan esittää muodossa $\int_a^b f(z(\theta))z'(\theta)\mathrm{d}\theta$. Ympyrän C eräs parametriesitys on $z(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Nyt $f(z(\theta)) = \overline{z(\theta)}^2 = (1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^2 = 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}$ ja $z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, joten

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{z}^2 \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \\
&= \Big/_{0}^{2\pi} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 2\mathrm{i}\theta - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = 4\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

b) Nyt $f(z(\theta)) = z(\theta)^2 = (1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2 = 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}$ ja $z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, joten

$$\begin{aligned}
\int_C z^2 \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{i2\theta} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta})\mathrm{d}\theta \\
&= \Big/_{0}^{2\pi} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}) = 0,
\end{aligned}$$

sillä e^z on 2πi-jaksollinen.

Koska C on sulkeutuva käyrä, niin a)-kohdassa ei voi olla olemassa integraalifunktiota, sillä integraali yli sulkeutuvan käyrän häviäisi luentokalvojen tuloksen Seuraus 1 mukaan.
Toisaalta b)-kohdassa selvästikin $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ on funktion $f(z) = z^2$ integraalifunktio, joten

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(z(2\pi)) - F(z(0)) = 0,$$

sillä käyrä on sulkeutuva.

3. Tässä tapauksessa $C: \ z(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \ z'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \ 0 \le \theta \le \pi$ ja

$$\begin{aligned}
\int_C z^i \mathrm{d}z &= \int_C e^{\mathrm{i}\mathrm{Log}(z)}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} e^{\mathrm{i}\mathrm{Log}(e^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\theta}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{i}e^{\theta(\mathrm{i}-1)}\mathrm{d}\theta \\
&= \Big/_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}e^{\theta(\mathrm{i}-1)} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}\left(e^{\pi(\mathrm{i}-1)} - 1\right) = \frac{1}{1-\mathrm{i}}\left(e^{-\pi} + 1\right).
\end{aligned}$$

4. Cauchyn lauseen mukaan $\int_C g(z)\mathrm{d}z = 0$, jos $g(z)$ on analyyttinen sulkeutuvan C:n sisällä. Toisaalta Cauchyn kaavan mukaan $g(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$, kun z_0 on C:n sisällä.

a) Sovelletaan Cauchyn kaavaa funktiolle $g(z) = \mathrm{e}^{-z}$ pisteessä $z_0 = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$, jolloin

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(z_0) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = 2\pi.$$

b) Integrandin ainoa napa on $z_0 = -\frac{1}{2}$, joka on C:n sisäpuolella. Sovelletaan Cauchyn kaavaa funktiolle $g(z) = z/2$ pisteessä z_0, jolloin

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(z_0) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{i}.$$

c) Integrandin $f(z)$ navat ovat $z_0 = 0, z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{i}$ ja $z_2 = -2\sqrt{2}\mathrm{i}$, joista ainoastaan $z_0 = 0$ on käyrän C määräämässä neliössä. Sovelletaan Cauchyn kaavaa pisteessä $z_0 = 0$ funktiolle

$$g(z) = \frac{\cos z}{z^2+8},$$

joka on analyyttinen C:n sisäpuolella ja C:ssä. Cauchyn lauseen mukaan

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(z_0) = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}\mathrm{i}.$$

Jätetään polun piirtäminen opiskelijalle.

5. Lasketaan ensin integroitavan funktion navat:

$$
\begin{aligned}
&z^2 + 2\mathrm{i}z + 3 = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow z = \frac{-2\mathrm{i} \pm \sqrt{-4 - 4 \cdot 3}}{2} \\
&\qquad\quad z = -\mathrm{i} \pm 2\mathrm{i} = \begin{cases} -3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Muodostetaan tämän jälkeen OMK:

$$
\begin{aligned}
\frac{4z}{z^2 + 2\mathrm{i}z + 3} &= \frac{A}{z + 3\mathrm{i}} + \frac{B}{z - \mathrm{i}} = \frac{(A+B)z - \mathrm{i}A + 3\mathrm{i}B}{z^2 + 2\mathrm{i}z + 3} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A + B &= 4 \\ 3B - A &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 3 \\ B &= 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Integraali voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$
\begin{aligned}
I = \int_{|z|=2} \frac{4z\sin(z)}{z^2 + 2\mathrm{i}z + 3}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=2} \frac{3\sin(z)}{z + 3\mathrm{i}} + \frac{\sin(z)}{z - \mathrm{i}}\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z|=2} \frac{3\sin(z)}{z + 3\mathrm{i}}\mathrm{d}z + \int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z - \mathrm{i}}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Ensimmäisen integraalin arvo on 0, sillä sen integrandin napa on integroimistien rajoittaman alueen ulkopuolella ja $3\sin(z)$ on analyyttinen ko. alueessa. Cauchyn kaavan mukaan jälkimmäisestä termistä saadaan ($f(z) = \sin(z)$ ja $z_0 = \mathrm{i}$):

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z - \mathrm{i}}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - e^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}\right) \\
&= \pi\left(e^{-1} - e\right).
\end{aligned}
$$

6. Kun z_0 on integroimistien C rajoittaman alueen sisäpuolella, integraalin arvo voidaan määrittää käyttämällä Cauchyn kaavaa derivaatalle: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$. Kun merkitään $\int_C \frac{e^{2z}}{z^3}\mathrm{d}z = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, huomataan, että tässä tapauksessa $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = 0$, $n = 2$ ja $f^{(2)}(z) = 4e^{2z}$. z_0 on sulkeutuvan integroimistien sisällä, joten integraalista saadaan

$$
\int_C \frac{e^{2z}}{z^3}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!} \cdot 4e^{2\cdot 0} = 4\pi\mathrm{i}.
$$