Kompleksianalyysi, syksy 2018

Harjoitus 3, ratkaisut

Harjoitustehtävät

1. a) Käytetään yhdistetyn funktion $(g \circ h)(z) = g(h(z))$ derivoimissääntöä

$$(g \circ h)'(z) = g'(h(z))h'(z)$$

funktioille $h(z) = 1 - 4z^2$ ja $g(z) = z^3$. Derivaataksi saadaan

$$f'(z) = -24z(1 - 4z^2)^2.$$

b) Tämä voidaan laskea kahdella tavalla. Ehkäpä luonnollisin tapa on käyttää derivaatan määritelmää

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Jos yllä erityisesti valitaan $h \in \mathbb{R}$ ja merkitään $f = u + iv$, niin saadaan

$$f'(z) = u_x(x, y) + \mathrm{i}v_x(x, y),$$

missä u_x ja v_x tarkoittavat funktioiden u ja v osittaisderivaattoja reaalimuuttujan x suhteen. Koska nyt

$$u(x, y) = \mathrm{e}^{-x} (x \sin y - y \cos y)$$

ja

$$v(x, y) = \mathrm{e}^{-x} (y \sin y + x \cos y),$$

niin tulon derivointikaavalla saadaan

$$u_x(x, y) = -\mathrm{e}^{-x} x \sin y + \mathrm{e}^{-x} \sin y + \mathrm{e}^{-x} y \cos y$$

ja

$$v_x(x, y) = -\mathrm{e}^{-x} y \sin y - \mathrm{e}^{-x} x \cos y + \mathrm{e}^{-x} \cos y.$$

Siten

$$f'(z) = -\mathrm{e}^{-x} x \sin y + \mathrm{e}^{-x} \sin y + \mathrm{e}^{-x} y \cos y + \mathrm{i} \left(-\mathrm{e}^{-x} x \cos y + \mathrm{e}^{-x} \cos y - \mathrm{e}^{-x} y \sin y \right).$$

Toinen tapa on päätellä "ohtaluulla" f:n lauseke z:n funktiona ja käyttää tunnettujen funktioiden derivointikaavoja. Sitä varten kirjoitetaan f muodossa

$$f(z) = -y\mathrm{e}^{-x} (\cos y - \mathrm{i} \sin y) + \mathrm{i}x\mathrm{e}^{-x} (\cos y - \mathrm{i} \sin y) = -y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} + \mathrm{i}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y},$$

missä käytettiin Eulerin kaavaa $\mathrm{e}^{y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y$. Edellisestä saadaan

$$f(z) = -y\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{i}x\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}z\mathrm{e}^{-z},$$

jonka derivaataksi saadaan tulon derivoimissäännöllä

$$f'(z) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{i}z\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}(z - 1)\mathrm{e}^{-z},$$

joka on luonnollisesti sama kuin aiemmin laskettu, mutta hieman nätimmässä muodossa.

c) Koska $f(z)$ on moniarvoinen, ei derivaatta ole järkevä käsite, ellei kiinnitetä haaraa. Kirjoitetaan $w = z^{1/2}$, jolloin $w^2 = z$ ja eksponenttiesityksen avulla saadaan kaksi vaihtoehtoa:

$$w = |z|^{1/2} e^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}} \quad \text{tai} \quad w = |z|^{1/2} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2} + \pi\right)} = -|z|^{1/2} e^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}}.$$

Molemmissa haaroissa jokaista $0 \neq z \in \mathbb{C}$ kohti löytyy tasan yksi $w \in \mathbb{C}$, jolle $w^2 = z$, eli $g(z) = z^2$ on funktion $f(z) = z^{1/2}$ käänteisfunktio. Tällöin käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$f'(z) = \frac{1}{g'(w)}, \quad z = g(w).$$

Koska $g'(w) = 2w = 2z^{1/2}$, niin juurifunktion derivaatta on

$$f'(z) = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

molemmissa haaroissa. Koska neliöjuurifunktio $x \mapsto x^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}$, ei ole derivoituva nollassa, ei juurifunktio $f(z)$ ole derivoituva origossa $z = 0$.

2. a) Merkitään $z = x + \mathrm{i}y$, jolloin f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}, \quad z \neq 0,$$

joten

$$u(x,y) = \mathrm{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{ja} \quad v(x,y) = \mathrm{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Osittaisderivaatat saadaan osamäärän derivoimissäännöllä. Ensiksi

$$u_x = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{ja} \quad v_y = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

joten $u_x = v_y$. Toisaalta yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä saadaan

$$u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{ja} \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

joten $u_y = -v_x$. Koska u ja v ovat määritysjoukossaan jatkuvasti derivoituvia ja toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt, on $f(z) = 1/z$ derivoituva kaikilla $z \neq 0$.
Derivaatta on

$$f'(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \mathrm{i}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Huomaa, että $-\overline{z}^2 = y^2 - x^2 + 2xy\mathrm{i}$ ja että $(x^2+y^2)^2 = |z|^4 = z^2\overline{z}^2$, joten saatu derivaatta voidaan kirjoittaa muodossa

$$f'(z) = -\frac{\overline{z}^2}{z^2\overline{z}^2} = -\frac{1}{z^2}$$

ja siten on sopusoinnussa tutun derivointisäännön $(1/z)' = -1/z^2$ kanssa.

b) Nyt $u(x,y) = x^2$ ja $v(x,y) = y^2$, joten Cauchy-Riemannin yhtälöiden mukaan on oltava

$$u_x = 2x = v_y = 2y \Leftrightarrow x = y.$$

Toinen Cauchy-Riemannin yhtälö $u_y = -v_x$ on triviaalisti tosi, sillä u ei riipu y:stä ja v ei riipu x:stä. Koska u ja v ovat jatkuvasti derivoituvia suoralla $y = x$, niin luentojen mukaan f on derivoituva suoralla $y = x$ ja

$$f'(x+\mathrm{i}x) = \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{y=x} + \mathrm{i}\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{y=x} = 2x.$$

c) Koska

$$z\,\mathrm{Im}\, z = (x+\mathrm{i}y)y = xy + \mathrm{i}y^2,$$

niin $u(x,y) = xy$ ja $v(x,y) = y^2$. Polynomifunktioina u ja v ovat derivoituvia ja derivaatat ovat jatkuvia kaikkialla. Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat nyt

$$u_x = y = v_y = 2y \quad \text{ja} \quad u_y = x = -v_x = 0,$$

jotka toteutuvat ainoastaan origossa. Koska lisäksi u ja v ovat jatkuvasti derivoituvia, niin luentojen mukaan f on derivoituva ainoastaan origossa, jossa

$$f'(0) = u_x(0,0) + \mathrm{i}v_x(0,0) = 0.$$

3. Funktio $u(x,y)$ on harmoninen, jos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Lasketaan osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 3x^2 + 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x.$$

Koska $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + 6x = 0$, on funktio u harmoninen ja se voi olla jonkin analyyttisen funktion f reealiosa. Olkoon $f = u + \mathrm{i}v$. C-R yhtälöt ovat voimassa analyyttisille funktioille, joten on oltava

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Big| \int dy$$
$$v(x,y) = y^3 + 2y - 3x^2y + B(x).$$

Derivoimalla v x:n suhteen saadaan

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + B'(x).$$

C-R:n mukaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Leftrightarrow\; -6xy + B'(x) = -6xy \\
\Leftrightarrow B'(x) &= 0 \;\Big|\int dx \\
B(x) &= C,\; C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Näin siis $v(x,y) = y^3 + 2y - 3x^2y + B(x) = y^3 + 2y - 3x^2y + C$ ja

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2 + \mathrm{i}(y^3 + 2y - 3x^2y + C).$$

4. Kuvauksen konformisuus on määritelty viikon 3 luentokalvoissa Määr. 3:ssa. Tutkitaaan nyt funktiota $f(z) = z^2$ pisteessä $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$ käyrien $c_1(t) = 1 + it$ ja $c_2(t) = t + 2t\mathrm{i}$ avulla. Piste z_0 on molempien käyrien piste, sillä $c_1(t_1) = c_1(2) = 1 + 2\mathrm{i}$ ja $c_2(t_2) = c_2(1) = 1 + 2\mathrm{i}$. Käyrät(suorat) siis leikkaavat tässä pisteessä.

   Olkoon

$$\begin{aligned}
d_1(t) &= f(c_1(t)) = (c_1(t)^2) = (1 + \mathrm{i}t)^2 = 1 + 2t\mathrm{i} - t^2 = 1 - t^2 + 2t\mathrm{i} \;\text{ ja} \\
d_2(t) &= f(c_2(t)) = (c_2(t)^2) = (t + 2t\mathrm{i})^2 = t^2 + 4t^2\mathrm{i} - 4t^2 = -3t^2 + 4t^2\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

   Lasketaan käyrien c_1 ja c_2 sekä kuvausten d_1 ja d_2 derivaatat:

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= \mathrm{i}, \\
c_2'(t) &= 1 + 2\mathrm{i}, \\
d_1'(t) &= -2t + 2\mathrm{i} \text{ ja} \\
d_2'(t) &= -6t + 8t\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

   Tutkitaan kuvauksen venytystä r ja kiertokulmaa θ pisteessä z_0. Piste z_0 on käyrän $c_1(t)$ piste, kun $t = 2$. Tällöin $d_1'(2) = -4 + 2\mathrm{i}$,

$$\begin{aligned}
|d_1'(2)| &= \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} = r|c_1'(2)| = r \text{ ja} \\
\arg(d_1'(2)) &= \arctan\left(\frac{2}{-4}\right) + \pi + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi = \arg(c_1'(2)) + \theta \\
\Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2}{-4}\right).
\end{aligned}$$

   Piste z_0 on käyrän $c_2(t)$ piste, kun $t = 1$. Tällöin $d_2'(1) = -6 + 8\mathrm{i}$,

$$\begin{aligned}
|d_2'(1)| &= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = r|c_2'(1)| \text{ ja} \\
\arg(d_2'(1)) &= \arctan\left(\frac{8}{-6}\right) + \pi + k2\pi \\
&= \arctan\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2}{-4}\right) + k2\pi = \arg(c_2'(1)) + \theta
\end{aligned}$$

   Konformisuutta koskevat ehdot siis täyttyvät näille kahdelle suoralle pisteessä z_0, sillä venytys ja kiertokulma ovat samat. (Kuvatut käyrät ovat derivoituvia pisteessä z_0)

5. a) Luentojen Lauseen 4 mukaan, jos f on analyyttinen ja $f'(z_0) \neq 0$, niin f on konforminen pisteessä z_0. Tutkitaan Joukowskin funktion $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = x+\mathrm{i}y+\frac{1}{x+iy} = x+\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}(y-\frac{y}{x^2+y^2})$ analyyttisyys C-R:n yhtälöiden avulla. Nyt siis $u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ja}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

joten funktio on analyyttinen (osittaisderivaatat jatkuvia alueessa Ω).
Tutkitaan Joukowskin funktion derivaattaa:

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pm 1.$$

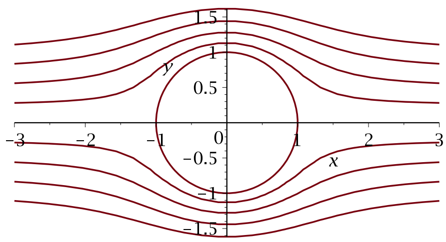
Joukowskin funktio on siis konforminen kaikkialla alueessa Ω, paitsi pisteissä $z = \pm 1$.

b) Varaus liikkuu kompleksisen potentaalifunktion $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ määräämän virtausfunktion $v(x, y)$ tasa-arvokäyriä pitkin. Edellä tutkittiin, että Joukowskin funktio on analyyttinen ja $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, $z \neq \pm 1$. Virtausfunktion tasa-arvokäyrät ovat nyt

$$v(x, y) = y - \frac{y}{x^2+y^2} = d,\; d \in \mathbb{R},$$

eli varaus liikku pitkin käyriä

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = d$$



Kuva 1: Virtausfunktion tasa-arvokäyriä

6. a) Koska nimittäjä ei saa nollaa ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$, niin P on rationaalifunktiona derivoituva $\mathbb{H}$:ssa. Ensimmäisiksi osittaisderivaatoiksi saadaan

$$P_x = -\frac{1}{\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{ja} \quad P_y = \frac{1}{\pi}\frac{(x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Derivoimalla edelliset vielä kertaalleen saadaan

$$P_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{2y(x^2+y^2)^2 - 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

ja

$$P_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{-2y(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}.$$

Ottamalla molemmista osoittajista (x^2+y^2) yhteiseksi tekijäksi ja yhdistämällä samanmuotoiset termit nähdään, että yhtälö

$$P_{xx} + P_{yy} = 0$$

toteutuu, joten määritelmän mukaan P on harmoninen funktio.

b) Koska funktion f nimittäjän ainoa nollakohta on $z = -i$ ja $-i \notin \mathbb{H}$, on f rationaalifunktiona derivoituva $\mathbb{H}$:ssa. Osamäärän derivoimissäännön mukaan

$$f'(z) = \frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2} \neq 0$$

kaikilla $z \in \mathbb{H}$, joten f on konforminen $\mathbb{H}$:ssa.

Lasketaan seuraavaksi $f(z)$:n itseisarvo ja osoitetaan, että $|f(z)| < 1$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Kannattaa tarkastella itseisarvon neliötä. Koska

$$|f(z)|^2 = \frac{|z - \mathrm{i}|^2}{|z + \mathrm{i}|^2} = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}$$

ja

$$(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \quad \text{kaikilla } y > 0,$$

niin

$$|f(z)|^2 < 1 \Leftrightarrow |f(z)| < 1.$$

Lopuksi, koska $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, niin f:n käänteisfunktio kuvaa yksikkökiekon $\mathbb{D}$ ylemmälle puolitasolle $\mathbb{H}$. Toisaalta käänteisfunktio voidaan ratkaista yhtälöstä

$$w = f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} \Leftrightarrow z = f^{-1}(w) = \mathrm{i}\frac{1+w}{1-w}.$$

Merkitään $w = u + \mathrm{i}v$, jolloin yhtälöstä

$$z = x + \mathrm{i}y = \mathrm{i}\frac{1+w}{1-w} = \mathrm{i}\frac{(1+w)\overline{(1-w)}}{|1-w|^2} = -\frac{2v}{(1-u)^2 + v^2} + \mathrm{i}\frac{1 + u^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2}$$

saadaan

$$x = x(u,v) = -\frac{2v}{(1-u)^2 + v^2} \quad \text{ja} \quad y = y(u,v) = \frac{1 + u^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2}. \tag{1}$$

Sijoittamalla x:n ja y:n parametriesitykset Poissonin ytimeen saadaan yksikkökiekossa harmoninen funktio

$$F(w) = F(u + \mathrm{i}v) = P(x(u,v), y(u,v)), \quad w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{D}.$$

Jätetään saatu ”suolainen” esitys kirjoittamatta näkyviin. Tärkeintä tässä oli idea, että ylemmässä puolitasossa harmoninen funktio voidaan konformikuvauksella muuntaa toisessa alueessa harmoniseksi funktioksi.